

ARCHIMEDIS OPERA:
APOLLONII PERGÆI CONICORUM
LIBRI IIII.
THEODOSII SPHÆRICA:

METHODO NOVA
ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.

PER
Is. BARROW, Exprofessorem *Lucasianum* CANTAB.
& Societatis Regiæ Soc.

Steph: Rodell



LONDINI,
Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Rob. Scott*, in vico
Little Britain. 1675.



Lectori.



Etustos authores, scientiarum parentes, abi interitu salvos præstari, posterorum interesse videtur, nè ingrati audiant. Neque tametsi quæ continent pleraque novis artificiis vel promptiùs elici, vel concisiùs astrui possint, fructu penitus destituitur illorum lectio. Nam amænum imprimìs videtur quibus à fundamentis tantum in fastigium evectæ sunt scientiæ dispicere; tum haud inutile fuerit degustare fontes, è quibus cuncta fermè recentiorum inventa dimanârunt; istorum quippe perquam ingeniosas atque subtiles persequendo vel æmulando methodos horum emicuit industria. Porrò sincerum demon-

strandi gustum ac peritiam non aliunde quis opinor feliciùs hauserit, quàm ex iis, quorum in theorematis deducendis præcipuæ relucent solertia ac elegantia; quas ut nemo transgredi possit, ità vix assequi quisquam valeat ab illorum Scriptis peregrinus: Ut taceam, cùm à posteris hæc scripta suis firmandis præsternantur, allegentúrque passim, illorum referre qui hæc studia tractant, ea præstò ad manum, nè dicam ad unguem, habere: Id ut promptè tibi succedat, & quàm exiguo impendio, præstitura videtur hæc editio; saltem præ illis, quæ enormi juxta mole spissæ ac pretio caræ hactenus prostant; sin hæc nihilominus displiceat, det ille quæso tibi pœnas, qui amicitiâ præpotenter abusus, me nequicquam reclamante, protrusit hæc crepundia, luci publicæ minimè nata vel debita. Vale.



Brevitatis gratiâ notæ quædam adhibentur, quarum hîc ſubjungitur interpretatio.

$A + B$, *hoc eſt*	A & B *ſimul acceptæ.*
$A - B$,	A, *demptâ* B.
$A -: B$,	*differentia ipſarum* A, & B.
$A \times B$,	A *multiplicata, vel ducta in* B.
$\frac{A}{B}$	A *diviſa per* B, *vel applicata ad* B.
$A = B$,	A *æquatur ipſi* B.
$A \sqsubset B$,	A *major eſt quàm* B.
$A \sqsupset B$,	A *minor eſt quàm* B.
$A . B :: C . D$,	A *ad* B *eandem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A, B, C, D \div\div$,	A, B, C, D *ſunt continuè proportionales.*
$A . B \sqsubset C . D$,	A *ad* B *majorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A . B \sqsupset C . D$,	A *ad* B *minorem rationem habet, quàm* C *ad* D.
$A . B + C . D \left\{ = \sqsubset \sqsupset \right\}$ M.N.	*Rationes* A ad B, & C ad D *compoſitæ* { *adæquant* / *excedunt* / *deficiunt à* } *ratione* M ad N.
Aq,	*Quadratum ex* A.
$\surd A$,	*Latus, vel radix quadrata ipſius* A.
Ac,	*Cubus ex* A.
$\surd Aq + Bq$,	*Latus compoſiti ex* Aq & Bq.

Reliquas, ſi quæ occurrunt, abbreviaturas Lector facili conjecturâ capiet, preſertim in analyſi tantillùm verſatus.

ARCHIMEDIS OPERA:

Methodo Nova Illustrata, & Succinctè

DEMONSTRATA.

Per ISAACUM BARROW,

Ex-professorem Lucasianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.



LONDINI,

Excudebat *Guil. Godbid,* vœneunt apud *Robertum Scott,* in vico **Little-Britain.** 1675.

PLUTARCH. *in vita* MARCELLI.

Pag. 307.

A*Tqui eos spiritus* Archimedes, *eam altitudinem ingenii, tantásque præceptorum divitias tenuit, ut quum per ea nomen atque opinionem sibi paravisset non humanæ sed divinæ scientiæ, nullum de his relinquere commentarium sustinuerit: verùm illa in parandis machinamentis industria, atque adeo omni quæ ad usum se applicaret, & ad utilitatem, arte pro humili & sordida repudiata, in iis tantùm posuerit studium suum, quæ præclara & eximia per se, neque ulli adstricta necessitati essent, non conferenda quidem cum aliis, sed quæ certamen excitent cum materia demonstrationi, quum illa mole & specie, exquisita hæc certitudine & vi excellat incredibili: neque enim implicatiores in geometria & contortas magis quæstiones, in simplicioribus liquidioribúsque conscriptas elementis invenias. Id dexteritati illius ingenij alij attribuunt: alij ad laborem referendum putant potius indefatigatum, quo quidvis eum efficere verisimile sit facilè & citra sudorem potuisse. Nam si quæras, per te non invenias demonstrationem illius quæstionum: Ubi didiceris, potuisse putes te eam vel tua sponte invenire, adeo strata est via atque expedita, quæ ad id quod intendit demonstrare perducit. Quare non sunt rejicienda illa quæ de eo feruntur, à sua quadam & familiari* Archimedem *perpetuò demulcitum Sirene, & cibi oblivisci & corporis curam relinquere solitum: quúmque raperetur subinde invitus ad ungendum corpus & ad balneum in foco figuras geometricas exarare: & dum ungeretur, ducere digito lineas, tanta illum dulcedine artis captum & revera inflammatum fuisse. Quum autem multa, & præclara invenisset, dicitur ab amicis & propinquis petisse ut vita defuncti cylindrum sphæram complectentem sepulcro imponerent, inscriberéntque proportionem, quatenus solidum continens excedat contentum. Atque is* Archimedes *quum esset, invictum se urbémque, quantum in ipso esset, præstitit.*

PLUTARCH. *in vita* MARCELLI.

Pag. 307.

Τηλικοῦτον μέντοι φρόνημα καὶ βάθος ψυχῆς, καὶ τοσοῦτον ἐκέκτητο θεωρημάτων πλοῦτον Ἀρχιμήδης, ὥστε ἐφ' οἷς ὄνομα καὶ δόξαν οὐκ ἀνθρωπίνης ἀλλὰ δαιμονίου τινὸς ἔσχε συνέσεως, μηδὲν ἐθελῆσαι σύγγραμμα, περὶ τούτων ἀπολιπεῖν, ἀλλὰ τὴν περὶ τὰ μηχανικὰ πραγματείαν καὶ πᾶσαν ὅλως τέχνην χρείας ἐφαπτομένην, ἀγεννῆ καὶ βάναυσον ἡγησάμενος, ἐκεῖνα καταθέσθαι μόνα τὴν αὑτοῦ φιλοτιμίαν, οἷς τὸ καλὸν καὶ περιττὸν ἀμιγὲς τοῦ ἀναγκαίου πρόσεστιν, ἀσύγκριτα μὲν ὄντα τοῖς ἄλλοις, ἔριν δὲ παρέχοντα πρὸς τὴν ὕλην τῇ ἀποδείξει, τῆς μὲν τὸ μέγεθος καὶ τὸ κάλλος, τῆς δὲ τὴν ἀκρίβειαν καὶ τὴν δύναμιν ὑπερφυῆ παρεχομένης. οὐ γὰρ ἔστιν ἐν γεωμετρίᾳ χαλεπωτέρας καὶ βαρυτέρας ὑποθέσεις ἐν ἁπλουστέραις λαβεῖν καὶ καθαρωτέροις στοιχείοις γραφομένας. καὶ τοῦθ' οἱ μὲν εὐφυΐᾳ τοῦ ἀνδρὸς προσάπτουσιν, οἱ δὲ ὑπερβολῇ τινι πόνου νομίζουσιν, ἀπόνως πεποιημένῳ καὶ ῥᾳδίως ἕκαστον ἐοικὸς γεγονέναι. ζητῶν μὲν γὰρ οὐκ ἄν τις εὕροι δι' αὑτοῦ τὴν ἀπόδειξιν, ἅμα δὲ τῇ μαθήσει παρίσταται δόξα τοῦ κἂν αὐτὸν εὑρεῖν, οὕτω λείαν ὁδὸν ἄγει καὶ ταχεῖαν ἐπὶ τὸ δεικνύμενον. οὔκουν οὐδὲ ἀπιστῆσαι τοῖς περὶ αὐτοῦ λεγομένοις ἔστιν, ὡς ὑπ' οἰκείας δή τινος καὶ συνοίκου θελγόμενος ἀεὶ σειρῆνος, ἐλέληστο καὶ σίτου καὶ θεραπείας σώματος ἐξέλειπεν· βίᾳ δὲ πολλάκις ἑλκόμενος ἐπ' ἄλειμμα καὶ λουτρὸν, ἐν ταῖς ἐσχάραις ἔγραφεν σχήματα τῶν γεωμετρικῶν, καὶ τοῦ σώματος ἀληλειμμένου διῆγε τῷ δακτύλῳ γραμμάς, ὑπὸ ἡδονῆς μεγάλης κάτοχος ὢν καὶ μουσόληπτος ἀληθῶς. πολλῶν δὲ καὶ καλῶν εὑρετὴς γεγονὼς λέγεται τῶν φίλων δεηθῆναι καὶ τῶν συγγενῶν, ὅπως αὐτοῦ μετὰ τὴν τελευτὴν ἐπιστήσωσιν τῷ τάφῳ τὸν περιλαμβάνοντα τὴν σφαῖραν ἐντὸς κύλινδρον ἐπιγράψαντες τὸν λόγον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ περιέχοντος στερεοῦ πρὸς τὸ περιεχόμενον. Ἀρχιμήδης μὲν οὖν τοιοῦτος γενόμενος ἀήττητον ἑαυτόν τε καὶ τὴν πόλιν ὅσον ἐφ' ἑαυτῷ διεφύλαξεν.

ARCHIMEDIS
DE SPHÆRA & CYLINDRO
LIBER PRIMUS.

Archimedes Dositheo Salutem.

ANtea quidem misi quæ contemplando invenimus, ipsorum adscribentes Demonstrationes; veluti *quòd omnis portio comprehensa sub recta linea, & rectanguli Coni sectione sesquitertia est trianguli habentis eandem basim ac portio, æqualemque altitudinem.* Jam quorundam incidentium Theorematum elaboravimus Demonstrationes, quæ sunt hujusmodi. Primò quidem *quòd Sphæræ superficies quadrupla sit maximi circuli eorum qui in ipsa sunt.* Secundum verò *quòd cujusque portionis sphæræ superficiei æqualis est circulus, cujus radius æquatur rectæ à vertice portionis ductæ ad peripheriam circuli, qui basis est portionis:* adhæc, *quòd omnis sphæræ cylindrus, basin quidem habens eandem maximo, eorum qui in sphæra sunt, circulo, altitudinem verò parem diametro sphæræ, cùm ipse sphæræ sesquialter sit, tum superficies ejus superficiei sphæræ sesquialtera.* Hæc quidem natura præcesserant circa dictas figuras demonstranda, nec tamen ab iis, qui ante nos Geometriæ incubuerunt animadversa sunt; ut intelliget quisquis circa has figuras proposita theoremata cum demonstrationibus contulerit. * Sicut & recepta multa eorum, quæ *Eudoxus* circa Solida speculatus est; veluti *quòd omnis pyramis tertia pars est prismatis basim habentis eandem cum pyramide,*

Pessimè depravatus locus: lego, ταῦτα μὲν τῇ φύσει προϋπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα· οὐ μὲν [illegible] γέγονεν ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων τεθεωρημένα, καὶ νοήσειεν δ᾽ ἂν —

** pro καί ὥσ lego ὥσπερ.*

mide, & parem altitudinem: quodque conus omnis subtriplus est Cylindri basin habentis eandem cum Cono, ac æqualem altitudinem: quippe cùm etiam hæc ex natura rei priùs inessent hisce figuris, etsi complures ante *Eudoxum* fuerant haud contemnendi Geometræ, contigit tamen ea ab omnibus ignorata fuisse, neque perspecta à quoquam. Licebit autem illis, qui poterint, circa hæc dispicere. Ex usu quidem fuisset & vellem hæc, adhuc superstite *Conone*, edita fuisse: hunc enim arbitramur imprimis idoneum fuisse hæc expendere, & appositam de iis sententiam proferre; bonum factum verò censentes etiam * aliis Mathematum *studiosis & peritis* impertire, mittimus tibi Demonstrationes adscribentes, de quibus fas erit iis, qui in Mathematicis versantur, dispicere. Vale.

Pro τὸ πάντων εἶδαι lego ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι.

Pro τῆνων lego τῆνον.

Pro αὐποῖς lego ἄλλοις.

ADscribuntur primò tam Axiomata quàm Adsumpta ad demonstrationes ipsorum.

Definitiones & Hypotheses.

I. Sunt quædam in plano lineæ curvæ terminatæ, quæ illarum terminos conjungentium rectarum vel totæ, ad easdem partes sunt, vel nihil habent ad alteras.

Scholium.

Lineæ curvæ (vel flexæ, καμπύλης γραμμῆς) nomine designatur non tantùm linea ubique continuóque curva, sed & quomodocunque inflexa; seu mixta è rectis & curvis, seu tota è rectis composita. Quomodo perimeter figuræ cujusvis rectilineæ, vel ejus quæcunque pars angulum includens, est linea καμπύλη. Siquidem rectè *Eutocius*: Ἰστέον ἐν ὅτι καμπύλας γραμμὰς καλεῖ οὐχ ἁπλῶς τὰς κυκλικὰς ἢ κωνικάς, ἢ ἀκλαστὴν ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἐν ἐπιπέδῳ γραμμὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν καμπύλην ὀνομάζει. μὴ αὐδὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁπωσοῦν συντιθεμένην, ὥστε κἂν ἐξ εὐθειῶν σύγκηται &c. Hujusmodi verò curvarum aliquas adsumit vel totas ad easdem rectarum, quæ terminos ipsarum connectunt, partes jacere, vel saltem nihil ad diversas situm habere. Sit exemplo peripheria circularis A B C, cujus terminos connectat recta

Fig. 1. A C, liquet totam lineam A B C supra rectam A C attolli ad partes

B.

B. Sin accipiatur in chorda A C punctum D, lineæ mixtæ D A B C pars quidem aliqua A B C versùs partes B supra C D (terminos D,C connectentem) jacet, alia pars A D secundum ipsam C D protractam (κατ' αὐτὴν in sequenti definitione, hoc est ita ut ei congruat) sita est, nulla verò pars infra C D, ad partes ipsi B contrarias, deprimitur.

II. Ad easdem verò partes cavam appello ejusmodi lineam, in qua * sumptis utcunque duobus punctis, quæ iis interjacent rectæ vel omnes ad easdem lineæ partes cadunt, vel aliquæ quidem ad easdem, quædam verò secundùm *ipsam, sed ad diversas nulla.

*lego αὖ (expletivum) pro ἑαυ.
* aut, supra ipsam.

Schol. Huic intelligendæ subobscuræ definitioni respiciatur & expendatur antecedentis huic præstructæ hypothesis explicatio; cui tantùm adjiciam certum esse cavitatis in easdem partes continuatæ signum, si nulla recta lineam pluribus quàm duobus punctis secet.

III. Haud absimiliter sunt quædam superficies terminatæ, non quidem ipsæ in plano, sed terminos *habentes (suos) in plano; & plani in quo terminos habent, vel totæ ad easdem partes sunt, vel nihil habent ad alias

* lego ἔχουσαι pro ἔχουσιν.

IV. In easdem verò cavas ejusmodi voco superficies, in quibus si duo sumantur puncta, quæ punctis interjacent rectæ vel omnes ad easdem superficiei partes cadunt, vel quædam ad easdem, quædam verò secundùm illas, in diversas autem nulla.

Schol. Qui primas duas capit, has intelliget hypotheses nullo negotio.

V. *Sectorem verò solidum* appello, quando sphæram conus secat verticem habens ad centrum sphæræ, comprehensam figuram tum à coni superficie, tum à superficie sphæræ intra conum.

Ut si B A C sit conus, cujus vertex A centrum sphæræ; figura D A E contenta superficie conicâ D A E, & sphæricâ superficie D E, erit sector solidus. Fig. 2.

Fit verò sector solidus D A E ex rotatu sectoris circularis D A Z circa radium A Z; posito arcu D Z = Z E. unde aliter definiri possit. Nota, quòd detracto sectore D A E, residuum è sphæra D X E subinde καταχρηστικῶς dicatur Sector sphæricus, hemisphærio major. *vid. schol. 51. hujus.*

VI. *Rhombum verò solidum* voco, quando duo coni eandem basim habentes vertices habent ad utramque partem plani basis, ita ut ipsorum axes in directum jaceant, ab ambobus conis compositam figuram solidam.

Talis est figura B A C D constans duobus conis B A C, B D C, quorum communis basis est circulus B C, & axis A D transiens per centrum E. Fig. 3.

Hæc autem adſumo.

Axiomata.

I. Linearum eoſdem terminos habentium minimam eſſe rectam.

II. Alias vero lineas ſi in eodem plano exiſtentes eoſdem terminos habeant, inæquales eſſe; quando ſcilicet ambæ ad eaſdem partes cavæ ſunt, & vel una tota comprehenditur ab *altera, & à recta eoſdem cum illa terminos habente, vel aliqua comprehenduntur, aliqua verò communia habet: & minorem eſſe illam quæ comprehenditur.

* deleo ἐπιφανείας.

Fig. 4. Sint exemplo lineæ A C B, A D E B, hiſce conditionibus præditæ; quòd nempe ſunt in eodem plano, & eoſdem terminos A B habent, & ad eaſdem partes cavæ ſunt; & A C B tota comprehenditur ab A D E B & recta A B, erit A C B minor quam A D E B. Item, linea mixta Z A C B minor eſt lineâ Z A D E B, quia Z A communis eſt, & reliqua A C B comprehenditur ab A D E B, ut prius.

Hoc pronunciatum ab Editoribus hactenus acceptum eſt peſſimè; in duo quippe diſcerpunt, unum veritate, alterum & ſenſu caſſum. Vide *Rivaltum*, & ſtupe.

III. Similiter & ſuperficierum eoſdem terminos habentium, ſi in plano terminos habeant, minorem eſſe quæ plana eſt.

IV. Alias vero ſuperficies etiam eoſdem terminos habentes, ſi in plano ſint termini, inæquales eſſe, modò ſint ambæ ad eaſdem partes cavæ, & vel una ſuperficies tota comprehenditur ab altera, & a ſuperficie eoſdem cum ipſa terminos habente, vel aliquæ (partes) comprehenduntur, aliquas vero communes habet: & majorem eſſe illam, quæ comprehenditur.

Itidem & hoc Axioma perquam ineptè & abſurdè diſpertitur in duo. Cæterùm ſi ſecundum probè perceperis, etiam hoc facilè aſſequeris. Lucem fœnerabunt quæ infrà ſæpius occurrent Exempla.

V. Quinetiam inæqualium linearum & inæqualium ſuperficierum, ac inæqualium ſolidorum *majus excedere minus eo quod ſibi (aliquoties) adjunctum ſuperare poſſit deſignatum quodvis * ad ſe rationem habens.

* lego μεῖζον pro μεταξύ.

* vel ſibi homogeneum; vel eorum quæ comparari poſſunt.

Ut ſi linea A C lineam A B exſuperet lineâ B C, linea B C toties accipi poteſt (ſeu taliter multiplicari) ut quamvis lineam (puta Z C) excedat. Sequitur ex *def. V. Elementi V.

* vel IV.

Hiſce ſuppoſitis,

Prop.

* *Prop. I.*

Si circulo (A D F) *inscribatur polygonum* (A B C D E F) *liquet inscripti polygoni perimetrum minorem esse circuli peripheriâ.*

* *Perperam vulgò pronunciatis accensetur.*

Nam singulum latus, ut A B, minus est arcu (A B) quem subtendit; & consequenter simul omnia latera arcubus simul omnibus minora sunt, hoc est tota perimeter polygoni totâ circuli peripheriâ. Fig. 5. 2 *ax. hujus.*

Coroll. 1. Eâdem planè ratione quomodocunque diviso arcu quolibet (A D) & ductis subtensis (A B, B C, C D); totus arcus omnibus subtensis major est.

Coroll. 2. Sinus rectus arcu suo minor est, hoc est à centro Z ductâ Z Y X ad A B perpendiculari, est A Y —⊐ arc A X.
Nam A Y B (2 A Y) —⊐ A X B (2 A X).

Prop. II.

Si circa circulum (ABCDE) *describatur polygonum* (MNOPQ), *polygoni circumscripti perimeter circuli perimetro major erit.* Fig. 6.

Nam linea composita A M + B M major est arcu A B, & B N + C N major arcu B C; ac ita de cæteris: quare tota circumscriptæ figuræ perimeter, totâ circuli peripheriâ major est. 2 *ax. huj.*

Corol. 1. Simili ratione quomodocunque diviso arcu quovis, circumductæ tangentes arcu toto majores sunt.

Corol. 2. Tangens arcu suo major est, nempe ductis Z A, Z M, est A M ⊏— A Y. Nam A M + B M (2 A M) ⊏— A Y B (2 A Y).

Prop. III.

Datis duabus magnitudinibus inæqualibus (A, B), *possibile est duas rectas inæquales invenire, ita ut major recta ad minorem habeat minorem rationem, quàm major magnitudo* (A) *ad minorem* (B). Fig. 7.

Multiplicetur A—B, per numerum aliquem (puta N) donec producta magnitudo, quam voco X, exsuperet B. tum assumptâ quâvis rectâ R, sit R. S :: 1. N :: A—B. X. Dico R+S, & S esse lineas quæsitas. Nam ob B —⊐ X, erit A—B. B. ⊏— (A—B. X ::) R. S. unde componendo erit A. B ⊏— R+S. S: *Q.E.F.* 5 *ax. huj.* *constr.* 3. 5.

Prop. IV.

Fig. 8. 9. *Datis duabus magnitudinibus inæqualibus*(A,B)*& circulo*(CDEF), *posito circulo polygonum inscribi, aliudque circumscribi, ita ut circumscripti latus ad latus inscripti minorem habeat rationem, quàm magnitudo major* (A) *ad minorem* (B).

a 3 *hujus.* b 1. 10. *el.* [a]Fiat O P. O Q :: A. B. & descripto super O P semicirculo adaptetur O Q, & conjungatur P Q. tum [b] bisecetur circumferentia C D E F, & ejus semissis D C F, & hujus semissis C D, ac ita continuò, donec angulus D G K, semissis anguli D G H sit æqualis angulo P O R ⊐ ang P O Q. pérque K ducatur tangens L M occurrens radiis G D, G H protractis in L,M ; tum conjungatur D H. à bisectione liquet rectam L M latus esse polygoni circulo circumscriptibilis, & D H latus polygoni inscriptibilis. Jam ob angulos D G N, c *const.* R O Q [c] pares, & angulos G N D, O Q R rectos, erunt trigona 4. 6. & 3. 5. D G N, R O Q similia. quare G D (G K). G N :: O R. O Q ⊐ 15. 5. O P. O Q atqui G K. G N :: L K. D N :: L M. D H. ergo L M. D H ⊐ (O P. O Q [c] ⊐) A. B. *Q.E.F*

Prop. V.

Rursus si fuerint duæ magnitudines inæquales, & sector potest circa sectorem polygonum describi, & aliud inscribi, ut latus circumscripti ad inscripti latus minorem habet rationem, quàm major magnitudo ad minorem.

Eodem planè modo conficitur, quo antecedens.

Prop. VI.

Fig. 10. 11. *Dato circulo* (G) *binisque magnitudinibus inæqualibus* (A,B), *circulo polygonum circumscribere, & aliud inscribere, ita ut circumscriptum ad inscriptum minorem habeat rationem, quàm major magnitudo* (A) *ad minorem* (B).

a 3 *hujus.* b 13. 6. c 4 *hujus.* [a]Fiat linea X. Z ⊐ A. B ; & inter X ac Z reperiatur media proportionalis Y ; [c] tum circulo dato inscribatur polygonum, aliúdque circumscribatur, ita ut hujus latus L M ad illius latus D H minorem habeat rationem, quàm X ad Y. Dico factum. Nam ratio L M ad d *cor.* 20. 6. D H duplicata [d] (hoc est ratio figuræ circumscriptæ ad inscriptam) minor

minor eſt ratione X ad Y duplicatâ, hoc eſt ratione X ad Z; quæ minor eſt ratione A ad B. ergo factum. *conſt.*

Corollarium. Prop. VII.

Quin ſimiliter demonſtremus, quòd duabus inæqualibus magnitudinibus datis, & ſectore, poſſit circa ſectorem polygonum deſcribi; & aliud ei ſimile inſcribi, ita ut circumſcriptum ad inſcriptum minorem rationem habeat, quàm major magnitudo ad minorem.

Lemma. Prop. VIII.

Manifeſtum & hoc, quòd, ſi detur circulus vel ſector, & ſpatium aliquod, poſſint circulo vel ſectori polygona æquilatera inſcribendo, & adhuc continuò reliquis ſegmentis, ſupereſſe quædam ſegmenta circuli vel ſectoris, quæ minora ſint propoſito ſpatio.

* Hæc enim tradita ſunt in Elementis. ** vid. 2. 12.*

Prop. IX.

Eſt autem demonſtrandum quòd & circulo dato (vel ſectore) (A) *& ſpatio* (B) *poſſit circumſcribi polygonum circulo (vel ſectori), * ita ut relicta à circumſcriptione ſegmenta minora ſint dato ſpatio.* **hoc eſt exceſſus polygoni ſupra circulum.*

[a] Circulo figura circumſcribatur, quam voca C; & alia inſcribatur, quæ vocetur I, ſic ut C. I $\sqsupset$ A + B. A. Dico factum. Nam ob A [b] $\sqsubset$ I; [c] erit C. A $\sqsupset$ (C. I [d] $\sqsupset$) A + B. A. unde dividendo C − A. A $\sqsupset$ B. A. [e] adeóque C − A $\sqsupset$ B. ergo factum. *a 6 hujus. b 9. ax. 1. c 8. 5. d conſt. e 10. 5.*

Prop. X.

Si cono Iſoſceli (V A X B Y C Z) *inſcribatur pyramis* (V A B C) *æquilateram habens baſim* (A B C), *ſuperficies ejus, exceptâ baſe, æquatur triangulo* (M N O), *habenti quidem baſin* (NO) *æqualem perimetro baſis* (A B C), *altitudinem verò* (M N) *perpendiculari* (V D) *demiſſæ à vertice* (V) *ad baſis unum latus* (A B). Fig. 12. 13.

Nam ducantur V E, V F etiam lateribus B C, C A perpendiculares, & quia triangula A V B, B V C, C V A ſibi mutuò [a] æquilatera ſunt, *erunt perpendiculares V D, V E, V F inter ſe pares. ergo triangulum, cujus baſis æquatur ipſis A B, B C, C A ſimul acceptis, & altitudo *a hypoth.*

b 38. 1. altitudo uni perpendicularium V D, [b] æquatur triangulis A V B +
c const. & hyp. B V C + C V A ; [c] hoc est triangulum M N O æquatur superficiei pyramidis exceptâ base. *Q. E. D.*

Prop. XI.

Fig. 14. *Si circa conum Isoscelem* (V D E F) *describatur pyramis* (VABC), *superficies Pyramidis demptâ base, æquatur triangulo, habenti basin æqualem perimetro basis* A B C, *altitudinem verò coni lateri* (V D).

a 18. def. 11. Sit V Z axis coni, & à centro Z ad contactum D ducatur recta Z D ;
b 18. 11. & ob V Z [a] rectam plano A B C, etiam triangulum V Z D plano
c 18. 3. A B C [b] rectum est : at verò tangens A D [c] perpendicularis est ipsi
d 4. def. 11. Z D (communi sectioni planorum V Z D, A B C) [d] ergo A D per-
e 3. def. 11. pendicularis est plano V Z D, & [e] consequenter lineæ V D ; ergo V D (coni latus) est altitudo trianguli V A B. Eâdémque ratione coni latus est altitudo trianguli V A C, & omnium, quibus constat lateratis coni superficies. [f] ergo triangulum, cujus basis est A B + B C +
f 38. 1. C A, altitudo latus coni, [f] æquatur triangulis coni superficiem constituentibus. *Q. E. D.*

Prop. XII.

Fig. 15. *Si in coni Isoscelis* (V A B) *circulum* (A B C D) *qui basis est coni inciderit recta* (C D) *ab ejus autem terminis ducantur rectæ* (C V, D V) *ad coni verticem* (V) ; *triangulum* (C V D) *ab incidente & ad verticem ductis comprehensum, minus est coni superficie* (C A V B D) *ductis ad verticem interceptâ.*

Bisecetur arcus C A B D in E, & ducantur rectæ C E, D E, V E.
a 1. 6. liquétque triang C V E + D V E [a] ⊏ C V D ; quia C E + D E
b 20. 1. [b] ⊏ C D, & altitudo communis est : sit excessus X, primò (suppone) non minor segmentis C E, D E : & quia superficies conica C V E +
c 3. ax. huj. segm. C E [c] major est incluso triangulo C V E (communis enim terminus est subtensa C E) ; & similiter conica superficies D V E + segm. D E ⊏ triang D V E, erit conjunctè conica superf C V D + segmenta C E, D E ⊏ triang C V E + D V E ; magisque conica su-
d hyp. perf. C V D + X ⊏ triang C V E + D V E [d] = triang C V D + X. unde sublato communi X, erit con. superf. C V D ⊏ triang C V D. Sin X minor sit segmentis C E, D E bisecentur arcus C E, D E, &
e 8. hujus. ipsorum semisses, [e] donec residua segmenta C A, A E, D B, B E minora

nora sint excessu X. túmque ductis rectis A C, A E, A V ; B D, B E, B V ; [c] erit ut priùs, con. superf. C V A $+$ segm C A $\sqsubset$ triang C V A. & con. superf. A V E $+$ segm A E $\sqsubset$ triang A V E ; adeóque conjunctè con. superf. C V E $+$ segm. C A, A E $\sqsubset$ triang C V A $+$ A V E ; $\sqsubset$ triang C V E. Simili ratione con. superf. D V E $+$ segm. D B, B E $\sqsubset$ triang D V E ; conjunctéque con. superficies C A V B D $+$ segm. C A, A E, D B, B E $\sqsubset$ triang C V E $+$ D V E [d] $=$ triang C V D $+$ X. Unde cùm segm. C A $+$ A E $+$ D B $+$ B E $\sqsupset$ X, erit con. superf. C A V B D $\sqsubset$ triang C V D. *Q. E. D.*

Ita τῆς ἀκριβείας ergò rem ex se satis claram demonstrat *Archimedes*, ut & tres sequentes non minùs αὐτοφανεῖς & αὐτοπίστους : nimirum abhorret is à multiplicandis extra necessitatem axiomatis & postulatis.

Prop. XIII.

Si ducantur rectæ (A C, B C) *tangentes circulum* (A D B) *qui basis est coni* (V A D B) *in eodem quo circulus existentes plano, & sibimet occurrentes ; à contactibus verò* (A, B) *& ab occursu* (C) *ad coni verticem* (V) *ducantur rectæ* (A V, B V, C V) ; *triangula* (A V C, B V C) *à tangentibus & ad coni verticem adjunctis* (*comprehensa*) *majora sunt coni superficie absumptâ ab ipsis.* Fig. 16.

Bisecetur arcus A B in D, & per D ducatur tangens E F, & connectantur V E, V F ; [a] éstque E C $+$ F C $\sqsubset$ E F ; quare addito communi A E $+$ B F, erit A C $+$ B C $\sqsubset$ A E $+$ E F $+$ B F. [b] proinde triang A V C $+$ B V C $\sqsubset$ triang A V E $+$ B V F $+$ E V F (quandoquidem communis est horum triangulorum altitudo). Sit excessus X, non minor segmentis A E D, B F D : jam quia pyramidica superficies E A V B F, cujus basis est trapezium E A B F, [c] major est inclusâ conicâ superficie A V B, cum segmento A D B (communi existente termino perimetro trianguli A V B) ; & subtrahendo commune segmentum A D B triangula A V E, E V F, B V F cum segmentis A E D, B F D majora sunt conicâ superficie A V B D : magis igitur triangula A V E, E V F, B V F cum X majora sunt eâdem superficie ; [d] hoc est triang A V C $+$ B V C $\sqsubset$ con. superf. A V B D. Sin X minor sit segmentis A E D, B F D, bisecentur arcus A D, B D, & ipsorum semisses, ac ita continuò [e] donec residua segmenta A L G, G K G, D M H, H N B minora evaserint quàm X, & ductis rectis V L, V K, V M, V N similiter procedet demonstratio ac in præcedenti.

a 20. 1.
b 1. 6.
c 4. ax. huj.
d hyp.
e 9 hujus.

Prop. XIV.

Fig. 17. *Si in superficie recti cylindri* (A C D B) *sint duæ rectæ* (A C, B D), *cylindri superficies* (A C F D B F A) *rectis intercepta, major est parallelogrammo* (A C D B) *comprehenso rectis* (A C, B D) *in superficie cylindri, & illis* (A B, C D) *quæ terminos ipsarum conjungunt.*

Bisecentur arcus A B, C D in E, F; & ducantur A E, B E, C F,
a 20. 1. D F: & ob A E + E B [a] $\sqsubset$ A B, [b] erit pgr. A E F C + B E F D
b 1 6. $\sqsubset$ pgr A B D C (existente pari omnium altitudine): sit X excessus non minor primò segmentis A E, B E, C F, D F; jam cylindrica su-
c 4 ax. hujus. perficies A E B D F C + segm. A E B, C F D [c] $\sqsubset$ pgr. A E F C, B E F D + triang. A E B, C F D (communi existente termino parallelogrammo A B C D) ergo subtrahendo commune triang. A E B + C F D, erit cylindrica superf. A E B D F C + segment. A E, B E, C F,
d hyp. D F $\sqsubset$ pgr. A E F C + B E F D [d] = pgr. A B C D + X. quare cùm X sit æqualis, aut minor segmentis istis, liquet cylindricam superficiem A E B D F C majorem esse pgr. A B C D.

Sin X segmentis istis minor sit, bisecentur arcus A E, B E, C F, DF,
e 8 hujus. & ipsorum semisses, [e] donec residua segmenta A G, G E, E H, H B; C L, L F, F M, M D minora sint ipso X: tum ductis rectis, ut in figura, erit (ut prius) { pgr A G L C + G E F L $\sqsubset$ pgr A E F C. pgr. B H M D + H E F M $\sqsubset$ pgr B E F D. } Et quia Cylindrica superf. A E B D F C + segm. A E B, C F D $\sqsubset$ pgr. A G L C, G E F L, B H M D, H E F M + rectilin. fig. A G E H B, C L F M D (communi existente termino parallelogrammo A B D C) ergò, subtractis communibus istis figuris rectilineis, cylindrica superf. A E B D F C + segm. A G, G E, E H &c. $\sqsubset$ pgr. A G L C, G E F L, B H M D, H E F M $\sqsubset$ pgr. A E F C + B E F D
const. = pgr. A B D C + X. Unde cùm X segmentis istis major sit, liquidò patet cylindricam superficiem A E B D F C majorem esse parallelogrammo A B D C. *Q.E.D.*

Prop. XV.

Fig 18. *Si in superficie recti cujusdam cylindri sint duæ rectæ* (A C, B D) *à terminis verò rectarum ducantur quædam* (A E, B E & C F, D F) *tangentes circulos, qui bases sunt cylindri, in eodem existentes plano, & concurrentes; parallelogramma* (A E F C, B E F D) *comprehensa sub tangentibus & lateribus cylindri, majora erunt cylindri superficie, interceptâ rectis* (A C, B D) *quæ sunt in superficie cylindri.*

Bi-

Biſecentur arcus AG in B, & ducatur tangens KGL; & erigantur KM, LN parallelæ axi cylindri, & connectatur MN: & liquet eſſe pgr. AEFC + BEFD $\sqsubset$ pgr. AKMC + KLNM + BLND (quia, [a]ut priùs, AE + BE $\sqsubset$ AK + KL + BL). a in 13 hujus.
Sit exceſſus X, non minor primò ſegmentis AKG, BLG, CMH, DNH. Et quia ſuperficies compoſita ex parallelogrammis AKMC, KLNM, BLND & trapeziis ABLK, CDNM [b]$\sqsubset$ cylind ſuperf. AGBDHC + ſegm. AGB, CHD (communi exiſtente termino parallelogrammo ABDC) erunt, ſubtractis communibus ſegmentis AGB, CHD, reſidua pgr[a] AKMC. KLNM, BLND + ſegm. AKG, BLG, CMH; DHN $\sqsubset$ cylindrica ſuperfic. AGBDHC. quare magis pgr. AKMC, KLNM, BLND + X ([c]hoc eſt pgr. AEFC, BDFG) $\sqsubset$ cylind ſuperf. AGBDHC. b 4 ax. huj. c hyp.
Q.E.D.

Sin X minor ſit dictis ſegmentis, biſecentur arcus AG, BG, ducantúrque tangentes, [d]uſque dum ſegmenta fiant minora quàm X; & ſimili tenore quo priùs demonſtratio progredietur. d 9 huj.

Corollaria.

Hiſce verò demonſtratis, è prædictis liquet,

1. Quòd ſi cono Iſoſceli pyramis inſcribatur, pyramidis ſuperficies, excluſâ baſi, minor eſt ſuperficie coni, demptâ quoque baſi.

Nam ſingula pyramidem continentia triangula ſunt minora ſingulis ſuperficiebus conicis, quas intercipiunt & ſubtendunt. ergo illa ſimul his ſimul minora ſunt, hoc eſt ſuperficies pyramidis ſuperficie coni. 12 hujus.

2. Et quòd ſi cono Iſoſceli pyramis circumſcribatur, ſuperficies pyramidis, exceptâ baſi, major eſt ſuperficie coni, baſi quoque ſeclusâ. 13 hujus.

3. Item apparet ex oſtenſis, quòd ſi cylindro recto priſma inſcribatur, priſmatis ſuperficies è parallelogrammis compoſita minor eſt ſuperficie cylindri, ſine baſi.

Minus enim eſt ſingulum priſmatis parallelogrammum ſuperficie cylindricâ, quam abſcindit. 14 hujus.

4. Et quòd ſi cylindro recto priſma circumſcribatur, priſmatis ſuperficies, parallelogrammis conſtans, major eſt ſuperficie cylindri, ſepoſitâ baſi. 15 hujus.

Hactenus ad ſequentes demonſtrationes utilia lemmata præſtravit; ad principalia jam progreditur Theoremata.

Prop. XVI.

Fig. 19. 20. *Omnis cylindri recti superficies* (S), *exclusâ basi, æqualis est circulo, cujus radius* (A) *proportione medius est inter cylindri latus* (L), *& basis diametrum* (2 R).

Si neges, esto primùm S $\sqsubset$ $\odot$ A; & circa circulum A describatur figura (quæ vocetur C), & inscribatur similis altera (quæ dicatur I) [a]ita ut C. I $\sqsupset$ S. $\odot$ A. tum cylindri basi circumscripta concipiatur figura similis ipsi C, quæ nominetur K: ejúsque perimeter dicatur P. Jam ob 2 R. A [b] :: (A. L [c] ::) 2 A. 2 L; vel antecedentes dimidiando R. A :: A. 2 L. erit [d] Rq. Aq (hoc est K. C) :: R. 2 L [e] :: $\frac{R}{2}$. L :: [f] $\frac{RP}{2}$. L P; ergo cùm sitq; K = $\frac{RP}{2}$. [h] erit C = L P. [k] ergo L P. I $\sqsupset$ S. $\odot$ A. atqui L P $\odot$ A. [l] $\sqsupset$ L P. I. ergo magis L P. $\odot$ A $\sqsupset$ S. $\odot$ A. [m] unde L P $\sqsupset$ S. hoc est superficies prismatis superscripti minor est superficie cylindri, contra 4 Coroll. præcedentis. ergo non est S $\sqsubset$ $\odot$ A.

Sin dicatur S $\sqsupset$ $\odot$ A, [a]fiat C. I $\sqsupset$ $\odot$ A. S. & inscripta concipiatur basi cylindri figura similis ipsi I, quæ dicatur Y, ejúsque perimeter P. tum ob Y. I :: [c] Rq. Aq [n] :: $\frac{RP}{2}$. L P; & Y [g] $\sqsupset$ $\frac{RP}{2}$, [h] erit I $\sqsupset$ L P. Verùm C. I [b] $\sqsupset$ $\odot$ A. S [l] $\sqsupset$ C. S. [m] adeóque S $\sqsupset$ I. ergo magis S $\sqsupset$ L P. hoc est superficies cylindri minor est inscripti prismatis superficie, contra 3. coroll præcedentis. ergo non est S $\sqsupset$ A. Superest igitur, ut sit S = $\odot$ A. *Q. E. D.*

a 6 hujus.
b hyp.
c 15. 5.
d cor 20. 6.
e 1. 12.
f 1 6.
g
h 14. 5.
k const.
l 8. 5.
m 10. 5.
n priùs.

Corollaria.

1. Cylindricæ superficies super æqualibus basibus constitutæ se habent ut latera, vel altitudines.
2. Cylindricæ superficies æquè altæ se habent ut diametri basium.
3. Cylindricæ superficies rationem habent compositam è rationibus laterum & diametrorum.
4. Similes cylindricæ superficies rationem habent laterum, vel diametrorum duplicatam.
5. Æqualium superficierum cylindricarum latera & diametri proportione reciprocantur; & converse, si reciprocentur hæc proportione, istæ sunt æquales.

Cùm

Cùm enim cylindricæ superficies se habeant ut circuli, quibus æquantur; & circuli ut quadrata radiorum; & hæc quadrata æquentur rectangulis ex latere & diametro cylindrorum; & ista rectangula dictas habeant passiones (ut in elementis ostenditur) ergo hæc patent.

Prop. XVII.

Omnis coni Isoscelis superficies (S) *absque basi, æquatur circulo, cujus radius* (A) *mediam habet proportionem inter coni latus* (L) *& basis circularis radium* (R). Fig. 21.

Si neges, sit primò S $\sqsubset$ $\odot$ A : & circulo A circumscribatur figura
C, & inscribatur altera I [a] sic ut C. I :: $\sqsupset$ S. $\odot$ A; tum basi coni cir- a 6 *hujus.*
cumscribatur quoque figura similis ipsi C, quæ vocetur K, ejúsque b *hyp.*
semi-perimeter appelletur P. Jam quia R. A [b] :: A. L. [c] erit Rq. Aq. c *cor.* 20. 5.
([d] id est K. C) :: R. L [e] R P. L P; ergò quum sit K [*] = R P, [f] erit C = d 1. 12.
L P. [g] quare L P. I $\sqsupset$ S. $\odot$ A. [h] sed L P. $\odot$ A $\sqsupset$ L P. I. ergo magis e 1. 6.
L P. $\odot$ A $\sqsupset$ S. $\odot$ A. unde L P. $\sqsupset$ S. [l] hoc est superficies pyramidis * f 14. 5.
cono circumscriptæ conicâ superficie minor est; contra priùs ostensa, g *hyp.*
in 2. coroll. 15 hujus. h 8. 5.
Sed secundò sit S $\sqsupset$ $\odot$ A. [a] fiátque C. I $\sqsupset$ $\odot$ A. S. & coni basi in- k 10. 5.
scribatur figura Y, similis ipsi I, cujus semiperimeter appelletur ϖ. l 11. *hujus.*
Jam Y. I [d] :: Rq. Aq [c] :: R. L :: [e] Rϖ. Lϖ. & [*] Y $\sqsupset$ Rϖ. unde I [f] $\sqsupset$ m 10 *hujus.*
Lϖ. atqui C. I. $\sqsupset$ $\odot$ A. S [h] $\sqsupset$ C. S. & consequenter S [k] $\sqsupset$ I $\sqsupset$ Lϖ.
[m] hoc est superficies coni minor est superficie pyramidis cono inscriptæ, itidem contra demonstrata, in 1. Coroll, 15. hujus.

Corollaria.

1. Conicæ superficies ad æquales Bases positæ sunt ut diametri basium.
2. Conicæ superficies æquè altæ, vel æqualia latera habentes sunt ut diametri basium.
3. Conicæ superficies rationem habent compositam è rationibus laterum & diametrorum.
4. Similes conicæ superficies habent duplicatam laterum vel diametrorum rationem.
5. Æquales conicæ superficies quoad latera & diametros proportione reciprocantur; & conversè.

Prop.

Prop. XVIII.

Fig. 22. *Omnis coni Isoscelis superficies* (S) *eandem ad basin rationem habet, quam coni latus* (L) *ad basis radium* (R).

a 1. 6. b cor. 2. 12. c 17 *hujus.*

Nam L. R[a] :: (L R. Rq[b] :: ⊙ rad. √ L R. ⊙ R. ([c]hoc est ::) S. ⊙ R. *Q.E.D.*

Prop. XIX.

Not. *in hoc & sequentibus triangula conos repræsentantia censentur per axes trajecta.*

Si conus Isosceles (A B C) *secetur plano* (D Q E) *basi* (B P C) *parallelo, parallelis planis intercepta coni superficiei* (D B C E) *æquatur circulus, cujus radius* (Z) *mediam habet proportionem inter coni latus* (D B) *parallelis planis interjectum, & æqualem utrique radio* (F B + G D) *circulorum* (B P C, D Q E) *qui in parallelis sunt planis.*

Fig. 23. 24.
a hyp. b 17. 6. c sch. 1. 2. d 16. 6. e 4. 6. f cor. 2. 12. g 17. hujus. Fig. 25.

Nam ob D B. Z[a] :: Z. B F + D G, [b]erit Zq = D B ×: B F + D G = A B — A D ×: B F + D G [c]= A B × B F + A B + D G — A D × B F — A D × D G = A B × B F — A D × D G (est enim A B × D G[d]= A D × B F, ob A B. B F[e] :: A D. D G). [f]ergo ⊙ rad Z = ⊙ rad √ A B × B F — ⊙ rad A D × D G Verùm ⊙ rad √ A B × B F [g] = superf. A B C; & ⊙ rad √ A D × D G [g] = superf. A D E. ergo ⊙ rad Z æquatur superficiei D B C E. *Quod E. D.*

Coroll. Hinc si recta Y X bisecet latera D B, E C; erit circulus radio √ D B × Y X æqualis superficiei conicæ D B C E.

Nam ductis rectis Y G, B E, F X; ob $D\,G = \frac{D\,E}{2}$, & $D\,Y = \frac{D\,B}{2}$, erunt Y G, B E parallelæ; ergo in pgr. G Y U E est Y V = G E. Simili discursu est V X = B F. unde Y X = G E + B F.

Prop. XX.

Fig. 26. *Si duo sint coni Isosceles* (B A C, X Z), *& unius superficies* (B A C) *æqualis sit alterius basi* (Z); *& quæ à basis centro* (D) *ad coni latus* (A C) *ducitur perpendicularis* (D E) *altitudini* (X) *æquetur; æquales erunt coni* (B A C, X Z).

a hyp. b 7. 5. c 4. 6. d 18 hujus. e 7. 5. & hyp. f 11. 5.

Nam ductâ A D, ob X = [a]D E, erit A D. X[b] :: A D. D E[c] :: A C. C D (sunt enim similia triangula rectangula A D E, A C D) [d] :: superf. B A C. bas. B F C[e] :: Z. bas. B F C[f] :: A D. X. Itaque

cum

cùm reciprocentur proportione bases & altitudines conorum B A C, Z X, ii sunt æquales. *Q.E.D.* g 15. 12.

Prop. XXI.

Omni Rhombo (G A H D) *ex Isoscelibus conis* (G A A, G D H) *composito, æquatur conus* (X Z) *habens quidem basin* (Z) *æqualem superficiei unius coni* (G A H) *eorum qui Rhombum continent, altitudinem verò* (X) *æqualem perpendiculari* (D E) *ductæ à vertice* (D) *alterius coni* (G D H) *ad prioris coni latus unum* (A H). Fig. 27. 28.

Nam ob X [a] = D E, est A D. X [b] :: A D. D E [c] :: A H. K H [d] :: superf. G A H. baſ. G L H [e] :: Z. baſ G L H. quare conus cujus altitudo [f] æquatur rectæ A D, & basis circulo G L H æquatur cono X Z (ob reciprocam nempe proportionem A D. X :: Z. G L H). atqui conus altitudine A D, basis G L H æquatur Rhombo A G D H (nam con G D H. con G A H [g] :: D K. A K; & componendo Rhomb A G D H. con G A H :: A D. A K [g] :: con $\begin{cases} \text{alt A D.} \\ \text{baſ G L H.} \end{cases}$ con GAH.) [h] ergo Rhombus A G D H æquatur cono X Z. *Q.E.D.*

a *hyp.*
b 7. 5.
c 4. 6.
d 18 *hujus.*
e *hyp.* & 7. 5.
f 15. 12.
g 14. 12.
h 1. *ax.* 1.

Prop. XXII.

Si conus Isosceles (B A C) *secetur plano* (G H) *basi* (B C) *parallelo, à circulo verò facto* (G H) *describatur conus* (G D H) *verticem habens basis centrum* (D): *factus autem Rhombus* (G A H D) *auferatur à toto cono* (B A C); *residuo æquatur conus* (X Z), *habens quidem basin* (Z) *æqualem superficiei conicæ* (G B C H) *parallelis planis interceptæ; altitudinem verò* (X) *æqualem perpendiculari* (D E) *ductæ à basis centro* (D) *ad coni latus unum* (A C). Fig. 29.

Conus enim, cujus altitudo est D E, & basis æqualis superficiei G B C H [a] æquatur differentiæ duorum conorum habentium eandem altitudinem D E, & bases æquales superficiebus A B C, A G H, hoc est differentiæ coni A B C, & Rhombi A G D H (per duas præcedentes). quare conus X Z isti differentiæ æquatur. *Q.E.D.* a 11. 12.

Prop.

Prop. XXIII.

Fig. 30. *Si Rhombi* (G A H D) *ex Isoscelibus conis* (G A H, G D H) *compositi unus conus* (A G H) *secetur plano* (M N) *basi* (G H) *parallelo; à facto autem circulo* (M N) *describatur conus* (M D N) *habens verticem* (D) *eundem cum altero cono* (G D H), *ab integro verò Rhombo* (G A H D) *auferatur effectus Rhombus* (M A N D), *residuo æquatur conus* (X Z) *habens quidem basin* (Z) *æqualem conicæ superficiei* (M G H N) *parallelis planis* (M N, G H) *interceptæ, altitudinem verò* (X) *perpendiculari* (D E) *ductæ à vertice* (D) *alterius coni* (G D H) *ad latus* (A H) *reliqui coni* (G A H).

11. 12. Conus enim, cujus altitudo æqualis est ipsi D E & basis superficiei conicæ M G H N, æquatur differentiæ duorum conorum habentium eandem altitudinem (D E), ac bases æquales superficiebus conicis

* 21 *hujus.* A G H, A M N, *id est differentiæ Rhomborum A G D H, A M D N. ergo conus X Z isti differentiæ exæquatur. *Q.E.D.*

Prop. XXIV.

Fig. 31. *Si circulo* (A B C D) *inscribatur polygonum * parilaterum simul ac*

* ἀρτιόπλευρον. *æquilaterum* (A E B F C G D H), *& agantur rectæ* (E H, B D, F G) *polygoni latera conjungentes, quæ parallelæ sint uni cuivis* (E H) *duo polygoni latera subtendentium, omnes conjunctæ* (E H + B D + F G) *ad circuli diametrum* (A C) *illam rationem habent, quam habet dimidia præter unum subtendens* (C E) *ad polygoni latus* (A E).

Ducantur enim rectæ H B. D F. Et quoniam anguli A C E, A E H, E H B, H B D, B D F, D F G, F G C, æqualibus insistentes arcubus,

a 27. 3. [a]æquales sunt, liquet triangula rectangula C E A, E I A, H I K, B L K,

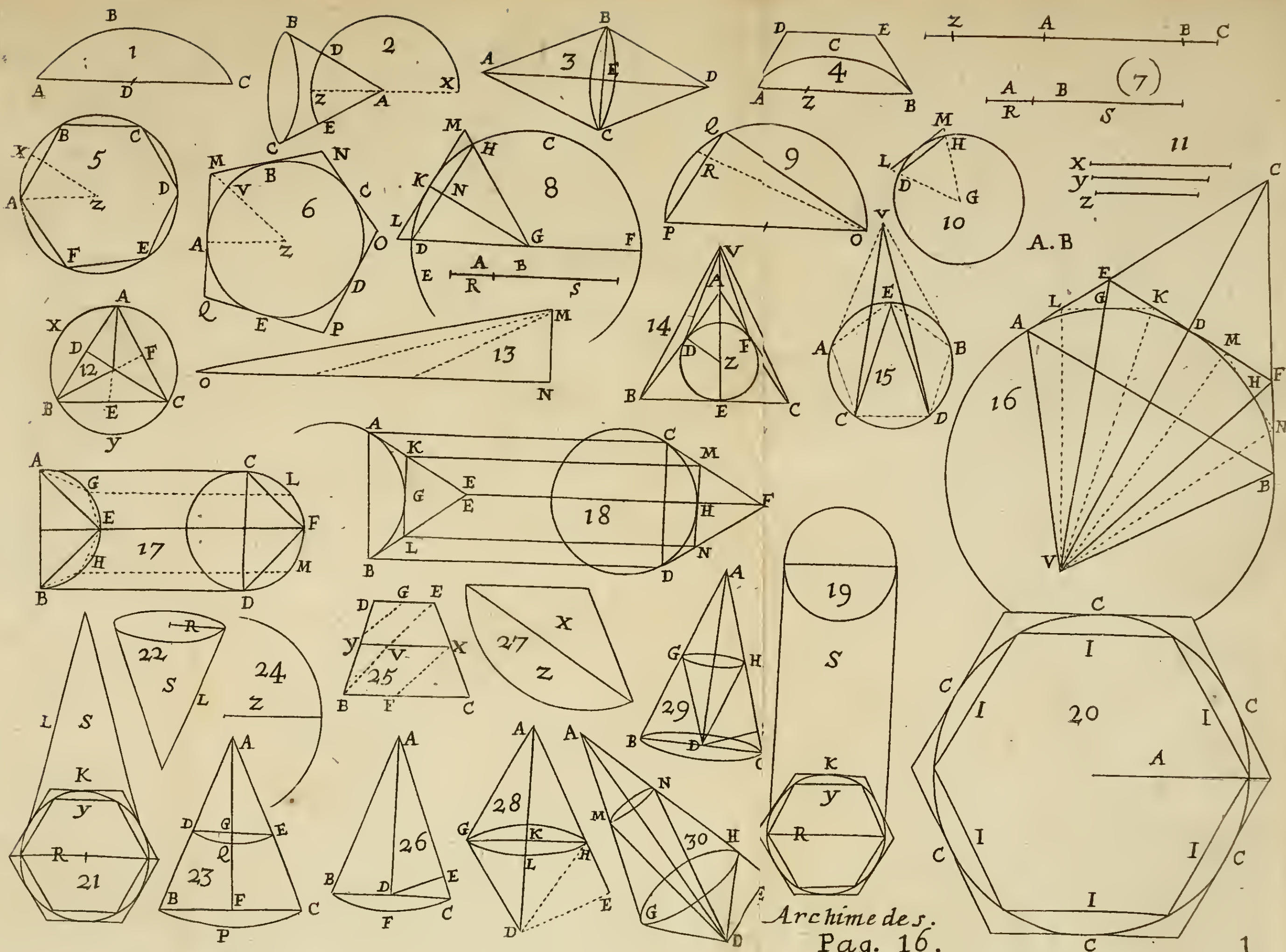
b 4. 6. D L M, F N M, G N C esse similia; [b]adeóque esse C E. E A ::

c 12. 5. E I. I A :: H I. I K :: B L. L K :: D L. L M :: F N. N M :: G N. N C. [c]quare ut C E ad E A, sic antecedentes conjunctim E H + B D + F G ad consequentes simul, hoc est ad totam diametrum A C: *Q.E.D.*

Coroll.

* 16. 6. C E × A C *= E A × : E H + B D + F G.

Prop.


Archimedes.
Pag. 16.
1

Prop. XXV.

Si circuli ſegmento (F A G) *inſcribatur polygonum* (FBEAHDG) *latera habens, exceptâ baſe, æqualia, & numero paria; ducantur verò rectæ* (E H, B D) *parallelæ baſi, connectentes latera polygoni, omnes ductæ cum dimidia baſe* (E H + B D + F N) *ad ſegmenti altitudinem* (A N) *eandem habent rationem, quam habet illa* (C E), *quæ à diametro circuli ad polygoni latus ducitur, ad polygoni latus* (A E). Fig. 31.

Nam, prorſus ut in præcedenti, eſt C E. E A :: E I. A I :: H I. I K :: B L. L K :: D L. L M :: F N. M N [a] :: E H + B D + F N. A N [*] :: C E. E A. *Q.E.D.* [a] 12. 5. [*] 16. 6.

Coroll. [*] A N × C E = E A × : E H + B D + F N.

Prop. XXVI.

Sit in ſphæra maximus circulus A B G D, eíque inſcribatur polygonum æquilaterum, multitudo autem laterum ipſius menſuretur à quaternario; ſint verò A G, B D diametri: quòd ſi manente diametro A G circumvolvatur circulus A B G D, polygonum continens; liquet quòd peripheria ejus ſecundùm ſphæræ ſuperficiem feretur. Anguli verò polygoni, præter eos qui ad puncta A, G ſecundùm peripherias ferentur circulorum in ſphæræ ſuperficie deſcriptorum, & rectorum circulo A G B D. Diametri autem ipſorum erunt rectæ polygoni angulos conjungentes, ad B D parallelæ. Aſt polygoni latera ſecundùm conos quoſdam ferentur; nempe A Z, A N ſecundùm ſuperficiem coni, cujus quidem baſis erit circulus circa diametrum Z N, vertex autem punctum A. Sed H Z, M N ſecundùm ſuperficiem quandam conicam ferentur, cujus quidem baſis eſt circulus circa diametrum H M, vertex verò punctum , in quo occurrent productæ H Z, M N ſibi mutuò & ipſi G A. Quinetiam H B, M D ferentur juxta conicam ſuperficiem, cujus baſis eſt circulus circa diametrum B D ad circulum A B G D rectus, vertex autem punctum in quo conveniunt B H, D M, ſecum invicem, & cum recta G A. Haud abſimiliter in altero ſemicirculo, latera ſecundùm ſuperficies conicas deferentur, itidem hiſce conſimiles. Ita quidem inſcripta erit ſphæræ figura quædam prædictis ſuperficiebus conicis comprehenſa, cujus ſuperficies minor erit ſuperficie ſphæræ. Diviſâ enim ſphærâ plano per BD recto ad circulum A B G D, ſuperficies alterius hemiſphærii, & ſu- 4 *ax. huj.* Fig. 32.

perficies inſcriptæ ipſi figuræ eoſdem terminos habent in eodem plano; nam utriuſque ſuperficiei terminus eſt ſuperficies circuli, qui circa diametrum B D circulo A B G D rectus; ſúntque ambæ ad eaſdem partes cavæ, atque ipſarum una ſuperficies comprehenditur ab altera, ac plano habenti eóſdem cum ipſo terminos. Haud aliter ſuperficies figuræ in altero hæmiſphærio minor eſt ſuperficie hemiſphærii: tota igitur ſuperficies figuræ, quæ in ſphæra, minor eſt ſuperficie ſphæræ.

Prop. XXVII.

Fig. 31. *In ſphæram inſcriptæ figuræ* (A E B F C G D H) *ſuperficies æquatur circulo, cujus radius poteſt rectangulum comprehenſum ſub figuræ latere* A E, *& rectâ* (E H + B D + F G) *æquali omnibus latera figuræ conjungentibus, paralleliſque duo figuræ latera ſubtendenti* (E H).

a 17. hujus. Nam $\odot$ rad $\sqrt{}$ A E $\times \frac{EH}{2}$ [a] = ſuperf conica E A H. [b] quare $\odot$
b cor. 2. 12. rad $\sqrt{}$ A E $\times$ E H = 2 ſuperf. E A H. Item (ſimili pacto) $\odot$ rad $\sqrt{}$
c 19 hujus. B E $\times$: B D + E H [c] = 2 ſuperf. B E H D. [d] ergo $\odot$ rad $\sqrt{}$. A E $\times$:
d 3. ax. 1. A E. F G
E H + B D + F G = 2. ſuperf. E A H + B E H D = ſuperf. A E B F C G D H A.

* hæc, & cor. 24. hujus. *Coroll.* * Hinc $\odot$ rad $\sqrt{}$ A C $\times$ C E = fig. A E B F C G D H A.

Prop. XXVIII.

In ſphæram inſcriptæ figuræ ſuperficies (I) *conicis ſuperficiebus contenta, minor eſt quàm quadrupla maximi circuli* (A B C D) *eorum qui ſunt in ſphæra.*

a coroll. 27 h. Nam ſuperf. I [a] = $\odot$ rad $\sqrt{}$ A C $\times$ C E $\sqsupset$ $\odot$ rad A C [b] = 4 $\odot$
b cor. 2. 12. rad A L.

Prop. XXIX.

Fig. 33. *In ſphæram inſcriptæ figuræ* (A F H D C B G E) *ſuperficiebus conicis contentæ, æqualis eſt conus* (K) *baſin quidem habens circulum æqualem ſuperficiei figuræ inſcriptæ in ſphæram, altitudinem verò æqualem perpendiculari* (X Z) *à ſphæræ centro* (Z) *in polygoni latus unum ductæ.*

Ducantur radii X E, X F, X G, X H, & connectantur anguli ab A utrinque æquè remoti rectis E F, G H. Eſtque Rhombo E X F A

[a] æqualis

[a]æqualis conus base conicâ superficie E A F, altitudine X Z. Item, productis G E, H F ad Q; si ex Rhombo G X H Q subducatur Rhombus E X F Q, residuo E G X H F [b]æquabitur conus base superficie conicâ E G H F, altitudine quoque X Z. Similiter, productis B G, D H ad P, si ex cono B P D subtrahatur Rhombus G X H P, residuo G B X D H [c] æqualis erit conus, cujus basis æquatur conicæ superficiei B G H D, altitudo rursus ipsi Z X. Idem erit in reliquo hemisphærio B C D. ergo cùm hisce conis omnibus [d] æquetur conus K; is solido quoque inscripto æquabitur. *Q.E.D.*

a 21 *hujus.*
b 23 *hujus.*
c 22 *hujus.*
d 11. 12.

Prop. XXX.

Inscripta sphæræ figura conicis superficiebus contenta minor est quàm quadrupla coni (M) *basin quidem habentis æqualem maximo circulo eorum qui in sphæra, altitudinem verò æqualem radio sphæræ.*

Nam coni K, in præcedente, [a] basis minor est quàm quadrupla circuli maximi, & ejus quoque altitudo X Z minor radio sphæræ; ergo quadruplus coni M major est isto cono K; hoc est figurâ inscriptâ. *Q. E. D.*

a *hyp.* & 29. *h.* 11, 12.

Prop. XXXI.

Sit in sphæra maximus circulus ABGD. Circa verò circulum ABGD describatur polygonum æquiangulum & æquilaterum; multitudo autem laterum ipsius mensuretur à quaternario. Circulo autem circumscriptum polygonum comprehendat circulus circumscriptus E Z H T, circa idem centrum existens ac ABGD. Manente verò EH circumvolvatur planum EZHT, in quo polygonum & circulus. Liquet igitur quòd quidem peripheria circuli ABGD secundùm sphæræ superficiem deferetur, ipsius autem E Z H T peripheria secundùm superficiem alterius sphæræ minori concentricæ feretur: contactus autem, ad quos latera tangunt, circulos describunt rectos circulo ABGD in minori sphæra. Anguli verò polygoni, præter illos qui ad puncta E, H, secundùm peripherias circulorum feruntur in majoris sphæræ superficie descriptorum, ad circulum E Z H T rectorum; verùm latera polygoni secundùm conicas superficies, utique sicut in præcedentibus. Erit igitur figura comprehensa à superficiebus conicis, minori sphæræ circumscripta, majori verò inscripta. Quòd autem circumscriptæ figuræ superficies major sit superficie sphæræ, sic ostendetur. Esto enim K D diameter alicujus circuli eorum, qui in minori sunt sphæra, existenti-

Fig. 34.

 bus

bus K, D punctis ad quæ duo latera circumſcripti polygoni tangunt circulum A B G D; diviſâ nempe ſphærâ plano per K D ad circulum A B G D recto, etiam ſuperficies deſcriptæ circa ſphæram figuræ dividetur à plano: utriuſque enim ſuperficiei terminus eſt circumferentia circuli, qui eſt ſuper diametrum K D ad circulum A B G D rectus; ſúntque ambæ ad eaſdem partes cavæ, & earum altera continetur ab altera ſuperficie, ac plano eoſdem terminos habenti. Minor igitur eſt comprehenſa portionis ſphæricæ ſuperficies ſuperficie figuræ circa ipſam deſcriptæ. Similiter & reliquæ portionis ſphæricæ ſuperficies minor eſt ſuperficie figuræ ipſi circumſcriptæ. Patet igitur quòd tota ſuperficies ſphæræ minor eſt ſuperficie figuræ circa ipſam deſcriptæ.

4 *ax. hujus.*

Prop. XXXII.

Fig. 35.

Superficies deſcriptæ circa ſphæram figuræ (E F G H I K L M) *æqualis eſt circulus, cujus radius poteſt æquale rectangulo comprehenſo ſub polygoni uno latere* (E F), *& rectæ æquali omnibus polygoni angulos connectentibus* (F M + G L + H K), *parallelis alicui* (F M) *ſubtendentium polygoni latera.*

Centro enim N (quod ſphæræ centrum eſt) per angulos polygoni deſcribatur circulus: huic inſcripta eſt figura E F G H I K L M. Ergo patet res ex 27 hujus.

Coroll. Ductâ F L eſt ⊙ rad. $\surd$ FL×GL = ſuper. EFGHIKLM. ibid.

Prop. XXXIII.

Figuræ circa ſphæram deſcriptæ ſuperficies major eſt quàm quadrupla maximi in ſphæra circuli (A B C D).

Nam (in figura præcedenti) à centro N ad contactus oppoſitos O, P ducantur rectæ N O, N P ([a]quæ quidem in directum jacent, ob angulos G N O, L N P [b]æquales); connexâ verò F L, ſunt F L. O P [c]pares (ob O F, P L [b]parallelas ac pares) quare cùm G L [d] ⊏ F L, erit $\surd$ G L × F L ⊏ O P. adeóque circulus radio $\surd$ G L × F L ([e]hoc eſt ſuperficies figuræ E F G H I K L M) major eſt circulo cujus radius O P, [f]hoc eſt quadruplo circuli cujus radius N O, hoc eſt quadruplo A B C D *Q.E.D.*

Coroll. Nota eſſe L F, P O pares.

a *cor.* 15. 1.
b *hyp.*
c 34. 1.
d 47. 1.
e *cor.* 27 *huj.*
f *cor.* 2. 12. & 4. 2.

Prop.

Prop. XXXIV.

Circa minorem sphæram (A B C D) *descriptæ figuræ æqualis est conus, basim quidem habens circulum æqualem superficiei ipsius figuræ, altitudinem verò æqualem radio sphæræ.*

Nam figuræ isti circumscribendo circulum E G I L, patet ex 29. hujus.

Prop. XXXV. Coroll.

Figura sphæræ minori circumscripta major est quàm quadrupla coni, basin quidem habentis maximum in sphæra circulum, altitudinem verò radium sphæræ.

Patet conferendo duas proximè antecedentes.

Prop. XXXVI.

Si sphæræ inscripta sit figura (A N B C D), *& alia circumscripta* (E F G I L) *sub similibus polygonis, ad eundem modum quo priùs constructis circumscriptæ figuræ superficies, ad superficiem inscriptæ, duplicatam rationem habet ejus, quam latus* (G F) *circumscripti maximo circulo polygoni, ad latus* (B N) *polygoni eidem circulo inscripti: Ipsa verò figura circumscripta, ad figuram inscriptam, rationem habet ejusdem rationis triplicatam.* Fig. 36.

Nam 1° ductis D N, L F, ob similitudinem figurarum est angulus G L F æqualis angulo B D N. adeóque rectangula triangula G L F, B D N sunt similia. & G L. L F [a] :: B D. D N. Est autem G Lq. G L × L F [b] :: G L. L F [a] :: B D. D N [b] :: B Dq. B D × D N. & permutando G Lq. B Dq ([c] hoc est G L. B D, bis, [a] vel G F. B N, bis) :: G L × L F. B D × D N [d] :: ⊙ rad √ G L × L F. ⊙ rad √ B B × D N ([e] hoc est) :: superf. E F G I L. superf. A N B C D. *Q.E.D.* a 4. 6. b 1. 6. c 20. 6. d cor. 2. 12. e sch. 7. 5. & cor. 27 hujus.

2. Ducatur Z O, à centro Z ad tactum O. Estque conus, [f] cujus basis est ⊙ rad √ G L × L F, & altitudo Z O, [f] æqualis corpori circumscripto. [g] Conus autem base ⊙ rad √ B D × D N, altitudine Z P, æquatur corpori inscripto. Hi coni [h] similes sunt, (quia Z O. Z P [a] :: G O. B P [k] :: G F. B N :: [l] √ G L × L F. √ B D × D N.) ergo sunt hi coni (hoc est ista corpora) in triplicata ratione ipsarum Z O, Z P, vel G F, B N. *Q.E.D.* f 34 hujus. g 29 hujus. h 24. def. 11. k 15. 5. l priùs & 22 6. m 12. 12. & 15. 5.

Prop.

Prop. XXXVII.

Fig. 37. *Omnis ſphæræ ſuperficies* (S) *quadrupla eſt maximi circuli, eorum qui ſunt in ſphæra.*

a 3 *hujus.*
b 4 *hujus.*
c 8. 5. & 31 *h.*
d 36 *hujus.*
e *conſt.*
f 17. 6.
g *conſt.*
h 10. 5.
* *ut priùs.*
k 26 *hujus.* & 8. 5.

Circulus maximi in ſphæra circuli quadruplus dicatur X: & primò ſi fieri poteſt, ſit X $\sqsupset$ S. Fiat autem, utcunque G. H [a] $\sqsupset$ S. X. & ſphæræ circumſcribantur ac inſcribantur figuræ, (quales innuunt præcedentia) ſic ut [b] latus D E. B C $\sqsupset$ G. $\surd$ G H. Harum verò figurarum ſuperficies appellentur Y, Z. Eſtque S. Z [c] $\sqsupset$ Y. Z. [d] $=$ D E. B C, bis [e] $\sqsupset$ G. $\surd$ G H bis [f] $=$ G. H [g] $\sqsupset$ S. X. [h] ergo Z $\sqsubset$ X. hoc eſt inſcriptæ figuræ ſuperficies major eſt quadruplo maximi in ſphæra circuli, contra 28 hujus.

Sin verò dicatur X $\sqsubset$ S. fiat G. H [a] $\sqsupset$ X. S. ac D E. B C [b] $\sqsupset$ G. $\surd$ G H. éſtque Y. S [k] $\sqsupset$ Y. Z * $\sqsupset$ G. H [g] $\sqsupset$ X.S. [h] unde Y $\sqsupset$ X; hoc eſt circumſcriptæ figuræ ſuperficies minor eſt quadruplo maximi in ſphæra circuli, contra 31 hujus. Reſtat igitur, ut ſit X $=$ S. *Q.E.D.*

Hoc nobiliſſimum Theorema (cum eo, quo univerſale redditur, ſubſequente ad Prop. XLIX.) inter *Archimedis* (dicam, an omnia quotquot fuerunt Geometrarum) inventa familiam ducit, cùm inveniendi ſubtilitate, tum rei elegantiâ, ſed & utilitate diffusâ.

Coroll. Circulus, cujus radius æquatur diametro ſphæræ, adæquat ſphæræ ſuperficiem.

Lemma. Sint duæ quæcunque rectæ L, M; oportet invenire alteram N, ita ut ſit L. M $\sqsubset$ L. N, ter. Fiat L. P :: P. M. & L. N :: N. P. Erit L. M $=$ L. P, bis $=$ L. N quater $\sqsubset$ L. N, ter.

Prop. XXXVIII.

Omnis ſphæra (A) *quadrupla eſt coni* (K) *baſim quidem habentis æqualem maximo circulo eorum qui in ſphæra, altitudinem verò radium ſphæræ.*

a 3 *hujus.*
b *Lemma præced.*
c 4 *hujus.*
d 8. 5.
e 36 *hujus.*
g *conſt.*
h 10. 5.
* *priùs.*

Si fieri poteſt, ſit primùm A $\sqsubset$ 4 K. Fiat A. 4 K [a] $\sqsubset$ L. M [b] $\sqsubset$ L. N, ter: tum figuræ circumſcribantur & inſcribantur (quæ vocentur Y, Z) ita ut latus D E. B C [c] $\sqsupset$ L. N. Eſtque A. Z [d] $\sqsupset$ Y. Z [e] $=$ D E. B C, ter [g] $\sqsupset$ L.N, ter [g] $\sqsupset$ L. M [g] $\sqsupset$ A. 4 K. [h] ergo Z $\sqsubset$ 4 K. contra 30 hujus.

Sin dicas eſſe 4 K $\sqsubset$ A. ſit 4 K. A [a] $\sqsubset$ L. M [b] $\sqsubset$ L.N, ter. & D E. B C [c] $\sqsupset$ L. N. tum erit Y. A. $\sqsupset$ [d] Y. Z * $\sqsupset$ L. M. [g] $\sqsupset$ 4 K. A. [h] quare

[h]quare Y $\sqsupset$ 4 K. contra 35 hujus. Ergo potiùs est sphæra A = 4 K. *Q.E.D.*

Coroll. Hemisphærium æquatur duplo cono ad eandem basin & æquè sibi alto; vel cono ad eandem basin & altiudinem habenti duplam.

Prop. XXXIX. Coroll.

Hisce verò præmonstratis liquet, quòd omnis cylindrus (A B C D) *basim quidem habens maximum in sphæra circulum* (A B), *altitudinem verò* (A D) *æqualem diametro sphæræ, sesquialter est sphæræ* (FGHK); *& quòd superficies istius cylindri cum basibus sesquialtera quoque est superficiei sphæræ.* Fig. 38.

Nam per E (sphæræ centrum) ductâ F H ad A B parallelâ, & junctis E A, E B; est a 14. 12.

1. $\frac{1}{6}$ Cyl A B C D [a]= $\frac{1}{3}$ Cyl A B H F [b]= con A E B [c]= $\frac{1}{4}$ sph. F G H K. [d] ergo Cyl A B C D. Sph F G H K :: 6. 4 :: 3. 2. b 10. 12. c 38 *hujus.* d *sch.* 15. 5.

2. Superf. cyl A B C D [a]= $\odot$ rad $\sqrt{AD \times DB}$ = $\odot$ rad A B [f]= 4 $\odot$ F G H K [g]= superf. sphæræ. ergo superf A B C D + 2 $\odot$ F G H K. superf. sphæræ :: 6. 4 :: 3. 2. e 16 *hujus.* f 4. 12. & 2 *cor.* 12. g 37 *hujus.*

Prop. XL.

Secetur sphæra plano non per centrum, sitque in ipsa maximus circulus A E Z secans perpendiculariter planum secans. Inscribatur autem portioni A B C polygonum æquilaterum, & parilaterum, exceptâ base A B. Haud absimiliter ac antehac, si manente G Z circumducatur figura, anguli quidem D, E, A, B ferentur secundùm circulos, quorum diametri D E, A B; latera verò *figuræ secundùm conicas superficies; erítque facta figura solida conicis superficiebus comprehensa, basin quidem habens circulum, cujus diameter A B, *verticem autem C: quinimò ut in præcedentibus, superficiem habebit minorem superficie portionis comprehendentis. Siquidem tam portionis quàm figuræ idem in plano terminus est circumferentia circuli, cujus diameter A B, & ad easdem cavæ sunt ambæ superficies, & una ab altera comprehenditur. Fig. 39.

*lego χήματος pro τμήματος.

*lego κορυφὴν pro κορυφῇ.

ax. 4 *hujus.*

Prop. XLI.

Superficies inscriptæ in sphæræ portionem figuræ (A D F B G E C) *æqualis est circulo, cujus radius potest æquale rectangulo comprehenso sub uno latere* (B F) *polygoni in maximi circuli segmentum* (A B C) *inscripti,* Fig. 40.

inscripti, & recta (F G + D E + A K) *æquali omnibus ad segmenti basin* (A C) *parallelis, cum semisse diametri basis.*

a 17 *hujus.* Nam ⊙ rad $\sqrt{BF \times FH^2}$ = superf con F B G & ⊙ rad $\sqrt{\frac{DF}{BF}}$
b 19 *hujus.* $\times$: H G + D I [b] = superf. D F G E. Item ⊙ rad $\sqrt{\frac{DA}{BF}}$ $\times$: I E + A K [b] = superf A D E C. [c] ergo conjunctè ⊙ rad $\sqrt{BF}$ $\times$: F G + D E + A K = superf F B G + D F G E + A D E C = superf A D F B G E C, *Q.E.D.*
c {1. 2. *cor.* 2. 12. 1. *ax.* 1.}

Coroll Ductâ LF, erit ⊙ rad $\sqrt{BK \times LF}$ = superf ADFBGEC.
d *cor.* 25 *huj.* Nam B F $\times$: F G + D E + A K [d] = B K $\times$ L F.

Prop. XLII.

Sphæræ portioni inscriptæ figuræ superficies (S) *minor est circulo, cujus radius æquatur ducta* (B A) *à portionis vertice* (B) *in circumferentiam circuli* (A C) *qui basis est coni.*

a *cor.* 8. 6. & 17. 6. Nam B K $\times$ L F ⊏ B K $\times$ L B [a] = B Aq. [b] ergo ⊙ rad B K $\times$ L F ([c] hoc est S) ⊏ ⊙ rad AB.
b *cor.* 2. 12.
c *cor. præc.*

Prop. XLIII.

Fig. 41. *Portioni inscripta figura* (A D B E C) *conicis superficiebus contenta cum cono* (A F C) *basin quidem eandem habente cum figura, verticem verò sphæræ centrum* (F), *æquale est cono* (K) *basin habenti parem superficiei figuræ, altitudinem verò perpendiculari* (F G) *à sphæra centro* (F) *in unum polygoni latus* (A D) *deductæ.*

a 21 *huj.* Conus enim base superficie D B E, [a] altitudine F G æquatur Rhombo D F E B. [b] Item conus, cujus basis æquatur superficiei A D E C,
b 23 *hujus.* altitudo ipsi F G æquatur frusto A D F E C: isti simul coni adæquant conum K; hic Rhombus & frustum constituunt figuram inscriptam cum cono A F C. ergò con K = fig. A D B E C + con A F C. *Q.E.D.*
c 11. 12.

Schol. Procedunt hæc circa portionem hemisphærio minorem. In majori A Y C subtrahendus est conus A F C, ut sit con K = fig. A Y C — con A F C. nempe si figura latus habens A D toti circulo inscribi possit; vel si arcus A D circulum dimetiri possit, aliàs non succedit. Similis est discursus; quid plura? Idem in sequentibus intelligendum, analogiâ bene servatâ.

Coroll.

Coroll. Conus, cujus basis æquatur circulo radium habente parem rectæ B C à vertice portionis ad basis circumferentiam ductæ, & altitudo radio sphæræ, superat inscriptam figuram cum cono A F C.

Hujus enim coni tam *basis, quàm altitudo superant basim & altitudinem coni K. * 42 *hujus.*

Prop. XLIV.

Sit sphæra, & in ipsa maximus circulus A B C, & semicirculo abscindatur rectâ A B ; sitque centrum D ; ac à centro D ad A, B connectantur D A, D B : & circa factum sectorem describatur polygonum, & circa ipsum circulus ; habebit utique centrum idem cum circulo A B C : quòd si manente E K circumductum polygonum in idem denuò restituatur, descriptus circulus secundùm sphæræ superficiem feretur ; & anguli polygoni circulos describent, quorum diametri polygoni angulos jungunt paralleli existentes ipsi A B. Puncta verò juxta quæ minorem circulum contingunt polygoni latera in minori sphæra circulos describunt, quorum diametri erunt quæ tactus conjungunt parallelæ existentes ad A B, latera verò secundùm conicas superficies ferentur, & erit circumscripta figura conicis superficiebus contenta, cujus basis qui super Z H circulus. Superficies autem dictæ figuræ major est superficie minoris portionis, cujus basis qui circa A B circulus : ducantur enim tangentes A M, B N. secundùm conicam ergo superficiem ferentur ; & a polygono A M T E N B genita figura majorem habebit superficiem, quàm portio sphæræ, cujus basis est qui circa diametrum A B circulus : nam in uno eodémque plano terminum habent circulum qui super diametrum A B ; & à figura continetur portio. Sed facta ab ipsis Z M, H N superficies conica major est facta ab ipsis M A, N B ; major enim est Z M quàm MA (rectum quippe *subtendit), ac N H, quàm N B ; quando verò hoc fuerit, major est superficies superficie : hæc enim in lemmatis ostensa sunt. Liquet igitur quòd circumscriptæ figuræ superficies major est superficie portionis minoris sphæræ. Fig. 42.

* Z A M. *Facilè deducitur ex 19 huj.*

Prop. XLV. Coroll.

Et patet quòd superficies circumscriptæ sectori figuræ æquatur circulo, cujus radius potest comprehensum & ab uno latere polygoni, & ab omnibus conjungentibus angulos, & prætereà semisse basis dicti polygoni. Fig. 43.

Nam * circumscripta figura, majoris sphæræ portioni inscripta est. Unde liquet ex *antedictis.

* Pro ἐγγεγραμμένον lego περιγεγρ.
* 41 *hujus.*

Prop. XLVI.

Fig. 43. *Superficies* (S) *figuræ* (D E F G H) *circa sectorem* (Z A B C) *descriptæ major est circulo, cujus radius æquatur ductæ* (B A) *à vertice* (B) *portionis in circumferentiam circuli* (A C) *qui basis est portionis.*

a cor. 41 huj.
b cor. 33 huj.
c hyp. & 4. 6.
d 14. 5. (6.
e cor. 8 & 17.
cor. 2. 12.

Circa figuram describatur sphæra D F H L; & connectantur rectæ D H, F D, L E. éstque $S^{a} = \odot\ rad \sqrt{LE \times FP} = \odot\ rad \sqrt{BM \times FP}$ (^{b}ob $LE = BM$) $\sqsubset \odot\ rad \sqrt{BM \times BK}$. (est enim $FP.BK^{c} :: FD.BA ::^{c} ZD.ZA$. adeóque $FP^{d} \sqsubset BK$). atqui $\odot\ rad \sqrt{BM \times BK}^{e} = \odot\ rad\ BA$. ergo $S \sqsubset \odot\ rad\ BA$. *Q.E.D.*

Prop. XLVII.

Fig. 44. *Quinetiam circumscripta sectori figura* (D E F G H) *cum cono* (D Z H), *cujus quidem basis est circulus circa diametrum* (D H) *vertex verò centrum* (Z) *æqualis est cono, cujus quidem basis æqualis est superficiei figuræ, altitudo autem perpendiculari* (Z N) *à centro ad latus ductæ, quæ utique æqualis est radio sphæræ.*

Figuræ circumducatur sphæra D E F G H; & liquet propositum ex 43 hujus.

Corollarium.

Hinc apparet circumscriptam figuram cum cono D Z H majorem esse cono, basim quidem habente circulum cujus radius æquatur illi (B A) quæ à vertice (B) portionis minoris sphæræ ad circumferentiam ducitur circuli (A C), qui basis est portionis; altitudinem verò æqualem radio minoris sphæræ.

a 46. & 47 h. Nam basis hujus coni ^{a} minor est base coni, qui æquatur circumscriptæ figuræ; altitudo autem æqualis.

Prop. XLVIII.

Fig. 45. Sit rursus sphæra , & in ipsa maximus circulus; ac semicirculo minor portio A B C, & centrum D; & sectori A B C inscribatur polygonum parilaterum, & huic simile circumscribatur, sintque latera lateribus parallela; & circa polygonum circumscriptum describatur circulus; & similiter ac in præcedaneis manente H B circumlati circuli figuras efficiant à conicis superficiebus circumseptas; demonstrandum

ſtrandum eſt quòd circumſcriptæ figuræ ſuperficies ad inſcriptæ ſuperficiem duplicatam habet rationem, quam latus circumſcripti polygoni ad latus inſcripti. Figura verò cum cono triplicatam habet rationem ejuſdem.

Nam circulus, cujus radius æquatur potenti rectangulum ex parallelis ad E Z cum dimidia E Z, & latere E K, [a] æquatur ſuperficiei circumſcriptæ: & circulus, cujus radius æquatur potenti rectangulum ex parallelis ad A C cum dimidia A C, & latere A L, [b] æquatur ſuperficiei inſcriptæ. Hæc autem rectangula * ſimilia ſunt (ob polygonorum ſimilitudinem) adeóque [d] ſeſe habent, ut quadrata ex lateribus E K, A L: quare & dicti circuli (hoc eſt ſuperficies circumſcripta, & inſcripta) [e] ſe habent ut quadrata ex E K, A L, [d] hoc eſt in duplicatâ ratione ipſarum E K, A L. a 45 *hujus.* b 41 *hujus.* * 4. 6. d 20. 6. e *cor.* 2. 12.

2. Ducatur D M perpendicularis ad latera E K, A L. Et quoniam conus, habens baſim æqualem ſuperficiei polygoni circumſcripti, altitudinem D M, [f] æquatur circumſcripto ſolido cum cono E D Z. & conus, cujus baſis æquatur ſuperficiei polygoni inſcripti, altitudo ipſi D N, [g] æquatur ſolido inſcripto cum cono A D C. Sunt autem radii baſium horum conorum (ut mox vidimus) ſicut latera E K, A L, [h] hoc eſt, ut altitudines D M, D N: [k] ergo hi coni ſimiles ſunt; adeóque [l] ſunt in triplicatâ ratione radiorum ſuorum, hoc eſt ipſarum E K, A L. & [m] proinde ſolida iſtis æqualia (circumſcriptum cum cono E D Z, & inſcriptum cum cono ADC) ſunt in eadem ratione triplicata. *Q.E.D.* f 47 *hujus.* g 43 *hujus.* h 4. 6. k 24. *def.* 11. l 12. 12. m 7. 5.

Prop. XLIX.

Cujuſcunque ſphæricæ portionis (A B C) *hemiſphærio minoris ſuperficies* (S) *æqualis eſt circulo* (X) *cujus radius æquatur ductæ* (B A) *à portionis vertice* (B) *ad circumferentiam circuli* (A C) *qui baſis eſt portionis ſphæricæ.* Fig. 46.

Si neges, eſto primùm ⊙ X ⊐ S. tum portioni circumſcribantur & inſcribantur figuræ (quarum ſuperficies appellentur Y, Z) ſic ut latus E F. A D bis (vel E Fq. A Dq) [a] ⊐ ⊙ X. S. Jam S. X [b] ⊏ EFq. A Dq [c] = Y. Z. [d] ⊏ S. Z. unde X [e] ⊐ Z, contra 42 hujus. a 5 *hujus.* b *conſt.* c 48 *hujus.* d 44 *hujus.* & 8. 5.

Sin dicatur X ⊏ S. ſit E Fq. A Dq [a] ⊐ X. S. éſtque X. S. [b] ⊏ E Fq. A Dq [c] = Y. Z [f] ⊏ Y. S. unde X [e] ⊏ Y, contra 46 hujus. Itaque potius, ut hæ vitentur repugnantiæ, eſt ⊙ X = S. *Q.E.D.* e 10. 5. f 40 *huj.* & 8. 5.

Prop. L.

Fig. 47. *Quinimò si portio* (A B C) *major sit hemisphærio, similiter ejus su-*
48. *perficies æqualis erit circulo, cujus radius æqualis est rectæ* (B A) *à portionis vertice deductæ ad circumferentiam circuli qui basis est portionis.*

Ductâ enim diametro B D, & connexâ D A; erit circulus radio
a *coroll.* 38 *h.* D B [a]æqualis superficiei totius sphæræ; & circulus radio D A [b] æ-
b 49 *hujus.* qualis superficiei portionis A D C. Detrahatur hic ab illo, [c] super-
c *cor.* 2. 12 & 3. *ax.* 1. estque circulus radio B A æqualis residuæ portioni A B C. *Q.E.D.*

Corollaria.

1. Cujusvis portionis superficies (A B C) æquatur curvæ superficiei cylindri (M R S N) habentis eandem altitudinem, vel axem (B K), & diametrum (R S) parem radio sphæræ.

a 16 *hujus.* Nam superf. cylindrica M R S N [a]æquatur circulo, cujus radius $\surd$ M R $\times$ R S, vel $\surd$ B K $\times$ B D, hoc est B A (nam B K, B A, B D sunt
b 49 & 50 *h.* $\div\!\div$) [b]id est æquantur superficiei portionis A B C. Hinc

2. Superficies portionum A B C, A D C se habent ut axes K B K D. Nam cylindricæ superficies ipsis æquales M R S N, μ R S ν [d], se habent ut latera R M, R μ, hoc est ut B K, K D.

3. Sphæricarum quarumvis portionum, superficies axibus suis proportionales sunt.

d 2. *cor.* 16. *h.* Nam & cylindricis superficiebus quibus æquantur [d] hoc convenit.

4. Sphærica superficies A α γ C parallelis planis A C, α γ intercepta æquatur cylindricæ superficiei R ϱ σ S iisdem planis interceptæ:

Nam si à superficie cylindrica ϱ N, cui æquatur sphærica superf. α B γ subtrahatur cylindrica superf, R N, cui æquatur sphærica superficies A B C, remanebit superf. cylind. ϱ S æqualis superf sphæricæ A α γ C.

5. Zonæ, seu superficies sphæricæ parallelis planis interceptæ suis axibus proportionales sunt.

Quia nempe cylindris, quibus æquales sunt, id convenit.

Prop. LI.

Fig. 49. *Cuicunque sphæræ sectori* (G A B C, *vel* S) *æqualis est conus* (K) *basin quidem habens æqualem superficiei portionis* (A B C) *ad sectorem pertinentis, altitudinem verò parem radio sphæræ.* *Si*

Si neges, esto primùm S ⊏ K. fiátque S. K [a] ⊏ L. M [b] ⊏ L. N ter. tum portioni circumscribantur & inscribantur figuræ X. Y, sic ut latus E F. A D [c] ⊐ L. N. Estque S. Y -|- con A G C [d] ⊐ X -|- con E Z G. Y -|- con A G C [e] = E F. A D, ter [f] ⊐ L. N, ter [f] ⊐ L. M [f] ⊐ S. K. [g] ergo Y -|- con A G C ⊏ K; contra coroll. 43æ hujus.

a 3 hujus. b lem. ad 37 h. c 5 hujus. d 8. 5. e 48 hujus: f conft. g 10. 5.

Sin dicatur K ⊏ S. Fiat K. S [a] ⊏ L. M [b] ⊏ L. N ter; & reliqua, ut prius. & ob X -|- con E G Z. [d] Y -|- con A Z G ⊐ * L. M [f] ⊐ K. S [h] ⊐ K. Y -|- con A G C. [g] erit X -|- con E G Z ⊐ K, contra coroll. 47æ hujus. quin potiùs est con K = sector S. *Q.E.D.*

** prius. h 8. 5.*

Schol. De sectore sphærico minori directè procedit demonstratio, sed infertur: idem facilè de majori. Nam quia conus, cujus basis æquatur toti sphæræ superficiei, altitudo radio sphæræ totam sphæram exæquat; & conus, cujus basis æquatur superficiei portionis A B C, altitudo itidem radio sphæræ, sectorem A G C B adæquat: detracto hoc cono ab illo, restabit conus, habens basim æqualem reliquæ superficiei sphæricæ, altitudinemque parem radio sphæræ, æqualis residuo sectori majori.

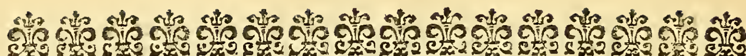
Corollaria.

1. Hinc sector (A G C B) æquatur cono, cujus altitudo sphæræ radio, basis æquatur circulo radium habenti parem subtensæ B A.

2. Portio sphærica (A B C) æquatur isti cono, dempto vel addito cono A G C; (addito, si portio major sit hemisphærio, dempto si minor:) si sector hemisphærio æquetur, cum portione coalescit.

Portionem sphæricam cum cono methodo aliâ comparat *Archimedes*, in libro de Conoidibus & Sphæroidibus. Nam sphæræ & portionibus ejus convenit, quicquid istic de sphæroide sphæroidisque portionibus ostenditur, respectivè.

ARCHI-



ARCHIMEDIS
De Sphæra & Cylindro
LIBER SECUNDUS.

Archimedes Dositheo Salutem.

ANtea quidem mandâsti mihi, Problematum demonstrationes scriberem, quorum ipse Propositiones ad *Cononem* miseram. Accidit autem eorum complura inter Theoremata scribi, quorum priùs ad te misi demonstrationes: quòd nempe omnis Sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli eorum qui in Sphæra: quinetiam quòd omnis portionis Sphæræ superficiei æquatur circulus, cujus radius æqualis est rectæ à vertice portionis ad basis circumferentiam ductæ. Præterea quòd omnis Sphæræ cylindrus, basin quidem habens maximum circulum ex iis, qui in Sphæra, altitudinem verò parem diametro Sphæræ, cum ipse magnitudine sesquialter est Sphæræ, tum superficies ejus sesquialtera superficiei Sphæræ. *Adhæc verò, quòd omnis sector solidus æqualis est cono basin quidem habenti circulum æqualem superficiei portionis Sphæræ, quæ in sectore, altitudinem verò parem radio Sphæræ. Quæcunque igitur Theoremata & Problemata scripta sunt *per hæc Theoremata in hoc libro describens ad te transmisi: quæcunque verò per aliam inveniuntur contemplationem, quæ sc. de Helicibus, & quæ de Conoidibus, propediem adnitar mittere. Problematum autem primum hoc fuit.

*Pro ϗ διότι lego ϗ δὴ ὅτι.

*vel ex his theorematis (deducta scilicet)

Prop.

Prop. I.

Sphærâ datâ spatium planum invenire æquale superficiei sphæræ.

Hoc verò manifestum est, è prædictis Theorematis ostensum. Quadruplum enim maximi in sphæra circuli planum spatium est, & æquale superficiei sphæræ.

Prop. II.

Secundum erat: *Dato cono vel cylindro* (A C) *sphæram invenire cono, vel cylindro parem.* Fig. 50, 51.

Analysis. Factum sit; sit nempe X diameter sphæræ æqualis cylindro A C, cujus diameter A B, latus B C. Fiat B C. B D :: 2. 3. quare cylindrus A D [a]sesquialter erit cylindri A C, [b]hoc est sphæræ ad diametrum X. ergo cylindrus A D [c]æquatur cylindro, cujus diameter, & altitudo æquantur ipsi X. [d]ergo erit A Bq. Xq :: X. B D. unde B D * $= \frac{X\ cub.}{A\ Bq}$ at verò A B, X, $\frac{Xq}{AB}$, $\frac{X\ cub.}{ABq}$ sunt ∺. quare componitur sic: sit B C $= \frac{2}{3}$ B D. ([a]unde cylindrus A C $= \frac{2}{3}$ cyl. A D); & inter A B, B D reperiantur duæ mediæ proportionales X, Y, erit X diameter sphæræ æqualis cylindro A C. Nam sphæra X est $\frac{2}{3}$ cylindri, cujus diameter & altitudo æquantur ipsi X; hic autem æquatur cylindro A D; quia est X. B D :: A B. Y :: A Bq. Xq. ergo sphæra ad diametrum X æquatur cylindro A C. *Q. E F.*

a 14. 12.
b *hyp.*
c 39. 1 *hujus.* & 1 *ax.* 1.
d 15. 12.
a 14. 12.
b 39. 1. *hujus.*

Scholium.

Hoc problema solidum est, ad ipsius quippe solutionem exigens, ut duæ mediæ proportionales inveniantur; quod præstare nequit Geometria communis, regulâ tantùm utens & circino; per conicas sectiones, & aliis compluribus modis effici potest; de quibus hîc taceo.

Prop. III.

Omnis sphæræ portioni (B V A) *æquatur conus* (B E A) *habens quidem basim* (B A) *portioni communem, altitudinem verò rectam* (KE), *quæ ad portionis altitudinem* (K V) *eandem rationem habet, quam composita è sphæræ radio* (C V) *& reliquæ portionis altitudine* (KD) *ad reliquæ portionis altitudinem* (KD). Fig. 52.

Nam

a *hyp.* Nam ob K E. K V[a] :: K D + C V. K D ; erit dividendo V E. K V :: C V. KD ; & permutando V E. C V :: K V. K D ; & componen-
b 14. 12. do C E. C V ([b]hoc eſt. con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad K B.}\\ \text{alt. C E}\end{array}\right.$ con.$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad K B.}\\ \text{alt. C V.}\end{array}\right)$ ::
c 20. 6. D V. K D[c] :: D Vq. D Bq[d] :: V Bq. K Bq ::[e] con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad V B.}\\ \text{alt. C V.}\end{array}\right.$
d 8, & 22. 6.
e 11. 12. con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad K B}\\ \text{alt. C V.}\end{array}\right.$ ergo[f] erit con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad K B}\\ \text{alt C E}\end{array}\right.$ = con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad V B}\\ \text{alt C V}\end{array}\right.$
f 9. 5. [g] = port B V A + con B C A. auferatur utrinque con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad. K B}\\ \text{alt. C K}\end{array}\right.$
g 1. & 2 *cor.* 51. *huj.*
h 14. 12. & 3. *ax.* 1. = con B C A ; [h]reſtabit con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ rad K B}\\ \text{alt. K E}\end{array}\right.$ = port. ABC. *Q E.D.*

Si portio major ſit hemiſphærio, idem planè diſcurſus adhibetur, niſi quòd hìc utrinque ſit addendus conus B C A, ſicut iſtic aufertur.

Corollarium.

Hinc facile eſt datæ portioni, ad eandem baſin, æqualem conum conſtituere ; faciendo ſc. KD. K D + C V :: K V. K E ; erítque K E quæſiti coni altitudo. Tertium Problema hoc erat :

Prop. IV.

Fig. 53. *Datam ſphæram* (B V A D) *plano ſecare, ita ut portionum ſuperficies ad ſe rationem habeant, eandem datæ* (X *ad* Y).

a 2 *cor.* 50. 1 *h.* Quia ſuperficies ſphæricæ [a]ſe habent ut axes ; liquet ſi diameter
b 10. 6. ſphæræ [b]ſecetur ad K, ut ſegmenta V K, K D ſint in ratione X ad Y, & per K ducatur planum B A ad ipſam V D rectum, eſſe ſuperficiem B V A ad ſuperficiem B D A, ut V K ad K D, vel X ad Y ; & proinde factum eſſe quod poſtulatur.

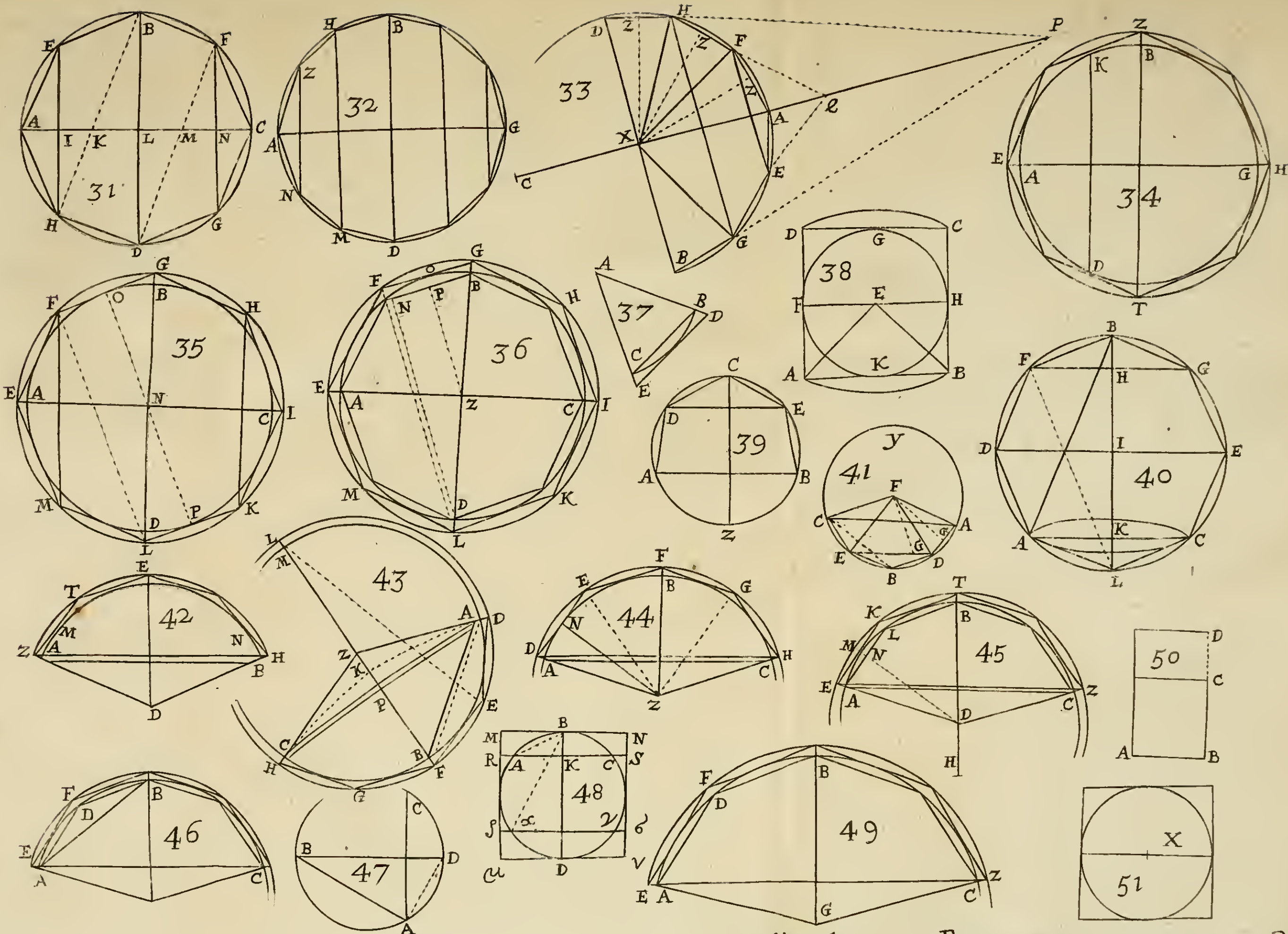
Prop. V.

Fig. 54. *Datam ſphæram* (B V A D) *plano ita ſecare, ut portiones ſphæræ rationem habeant eandem datæ* (X *ad* Y).

Analyſis. Factum ſit ; ſecet nempe planum B A ſphæram, ita ut portiones B V A, B D A habeant rationem X ad Y ; & ſit V D portionum axis ; ſintque V D = d. *C V = r. D K = a. unde K V =

*C centrum ſphæræ.

2 *r*


31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51

$2r-a$. Jam si DK. DK + CV :: KV. KE, hoc est $a.\ a+r :: 2r-a.\ KE = \frac{2rr+ra-aa}{a}$. [a]erit conus BEA æqualis portioni BVA. a 3 *hujus.*
Item si [a] VK. VK + CV :: KD. KF; hoc est $2r-a.\ 3r-a :: a.\ \frac{3ra-aa}{2r-a} = $ K, [a]erit conus BFA æqualis portioni BDA. [b] ergo X.Y :: con BEA. con BFA [c] :: KE. KF :: $\frac{2rr+ra-aa}{a}.\ \frac{3ra-aa}{2r-a}$ :: X. Y. quare (ducendo in se extrema & media) erit $\frac{3xra-xaa}{2r-a} = \frac{2yrr+yra-yaa}{a}$; & (utrumque latus multiplicando per $2r-a$ & a) erit $3xraa - xa^3 = 4ry^3 - 3yraa + ya^3$. & (transponendo) $3xraa + 3yraa - xa^3 - ya^3 = 4yr^3$. & (utrinque dividendo per $x+y$) $3raa - a^3 = \frac{4yr^3}{x+y} = \frac{{}^*yrdd}{x+y}$ (*substituendo dd pro $4r^2$). & faciendo $x+y.\ y :: r.\ p = \frac{yr}{x+y}$, erit $3raa - a^3 = pdd$. hoc est, æquationem hanc, ad analogismum redigendo, $3r-a.\ p :: dd.\ aa$. hoc est CV+KV. $\frac{Y \times CV}{Y+X}$ :: VDq. DKq. qui ipsissimus est analogismus ad quem rem deduxit *Archimedes*, (quod, ut hoc obiter moneam, satis prodit qualem is analysin usurpârit; nam huc eum devenisse varias istas proportionum compositiones, divisiones, alternationes, & inversiones, quas ostentat, adhibendo, penè supra fidem sit: quod si fecisset, casui potiùs imputandum esset, quàm arti, quòd in genuinas inciderit solutiones, & hoc ei constanter obtigisse, vix concipi potest.

b *hyp.* & 7.5.
c 14 12.
* 4. 2.

Ipsum Problema quod attinet, liquet illud esse solidum, nec in eo genere facillimum effectu; integram pollicetur Author ejus resolutionem & compositionem, at quòd præstiterit non apparet. Ei supplendo defectui nonnullas *Eutocius* bene longas & laboriosas exhibet constructiones, per conicarum utique sectionum occursus, quas nos omittimus. Præ illis concinnam & expeditam constructionem tradit Excellentissimus *Hugenius*, in primo Problematum illustrium, quam vide sîs; vel adhibeas ipse generalem *Cartesii* methodum, quam pro construendis hujusmodi problematis edocet, in Geometriæ suæ tertio.) Nos Authoris insistentes vestigiis suppositâ hujus analogismi effectione, problema sic componimus.

Fiat X + Y. Y :: C V. P ; & secetur D V in K, ita ut sit C V + K V. P :: V Dq. K Dq. & per K transeat planum ipsi V D rectum. Dico factum. Nam sit C V + D K. D K :: K E K V. & C D + V K. V K :: K F. K D, eritque dividendo C V. D K :: V E. K V. & C D. V K :: D F. K D. permutandóque C V. V E :: D K. K V :: DF.CD. inverséque componendo C E. C V (C D) :: C F. D F. & tam antecedentes quàm consequentes conjungendo E F. C F :: C F. D F. unde E F. D F [a]:: C Fq. D Fq :: D Vq. D Kq (erat enim priùs C D, D F :: K V. D K ; adeóque componendo C F. D F :: D V. D K). atqui D Vq. K Dq [b] :: C V + K V. P. [c]ergo E F. D F :: C V + KV. P. quinetiam fuit C V + V K. V K :: K F. K D ; & conversione rationis C V + V K. C V :: K F. D F ; seu inversè CV. CV + V K :: D F. K F. ergo ex æquo perturbatè C V. P :: E F. K F. [d] id est X + Y. Y :: E F. K F. & divisim X. Y :: E K.K F [e] :: con B E A. con BFA [f] :: port B V A port B D A :: X. Y. *Q.E.F.*

a 20 6.
b *const.*
c 11.5.
d *const.* & 11. 5.
e 14 12.
f *const* & 3 *h.*

Lemma, pro sequenti.

Fig. 55. 56. Sint coni D M F, G O I æquales similibus sphæricis portionibus D E F, G H I (ad easdem bases constitutis) ; dico conos hos assimilari.

Nam productis axibus M N R, O P T sint sphærarum centra Q, S. & ob portionum similitudinem erit E N. N R :: H P. P T. & antecedentes dimidiando Q R. N R :: S T. P T. componendóque Q R + N R. N R :: S T + P T. P T. [a] hoc est M N. E N :: O P. H P. at rursus, ob portionum similitudinem, est E N. N D :: H P. P G. ergo ex æquali M N. N D :: O P. P G. [b]ergo coni D M F, G O I sunt similes. *Q.E.D.*

a 3 *hujus.*
b 24 *def.* 11.

Prop. VI.

Fig. 57. *Datæ sphæræ portioni* (D E F) *similem, alterique datæ* (A B C) *æqualem constituere.*

Analysis. Sit G H I portio quæsita, fiántque coni A K C, D M F, G O I æquales portionibus A B C, D M F, G O I, singulæ singulis ordine. [a] Quare con G O I = con A K C. & [b]idcirco A Cq. G Iq :: P O. L K. * unde $\frac{A\,Cq \times L\,K}{G\,Iq} = P\,O$. Item ob [c] similitudinem conorum D M F, G O I [d] est DF. NM :: GI. PO :: [e] GI. $\frac{ACQ \times L\,K}{G\,Iq}$ :: G I

a 1. *ax.* 1.
b 15.12.
* c *lemm. prec.*
d 24 *def.* 11.
e 7. 5.

:: G I cub. A Cq × L K. quare $\frac{DF \times ACq \times LK}{NM}$ = G I cub. &(dividendo per A Cq) $\frac{DF \times LK}{NM} = \frac{GI\,cub}{ACq}$. atqui AC, GI, $\frac{GIq}{AC}$, $\frac{GI\,cub}{ACq}$ sunt ∺. ergo G I est prima duarum inter A C, & $\frac{DF \times LK}{NM}$ mediarum proportionalium.

Vides & hoc problema esse solidum, utpote quod desideret inventionem duarum mediarum proportionalium; quâ suppositâ sic construetur. [a]Fiant coni A K L, D M F pares datis portionibus A B C, D E F. sitque M N. K L :: D F. Z = $\frac{KL \times DF}{MN}$. & inter A C, Z reperiantur proportione mediæ G I, & X. Circa G I verò describatur portio circularis G H I continens angulum G H I = ang D E F. erit portio G H I, quam quæris. Nam faciendo conum G O I parem portioni G H I, quia portiones G H I, D E F [c] similes sunt, [d] erunt & coni G O I, D M F similes. quare P O. G I [e]:: M N. D F :: [f] K L. Z. & permutando P O. K L :: G I. Z [f]:: A C. X [g] :: A Cq. G I q. ([h]sc. ob A C, G I, X, Z ∺). itaque reciprocam habent coni G O I, A C K basium & altitudinum proportionem; [k] ergo coni G O I, A C K [h](hoc est portiones G H I, A B C) æquantur. *Q.E.F.*

a 3 *hujus.*
b 33. 3.
c *constr.*
d *lem. præc.*
e 24 *def.* 11.
f *const* & 16.5.
g 20. 6.
h *const.*
k 15.12.

Prop. VII.

Datis duabus sphæræ portionibus (A B C, D E F) [*sive ejusdem, sive non*] *invenire sphæræ portionem, quæ quidem datarum uni* (D E F) *similis erit, superficiem verò habebit alterius portionis* (A B C) *superficiei parem.* Fig. 58. 59. 60.

Analysis. Sit portio G H I qualis exponitur. unde cùm portionum G H I, A B C superficies æquentur, [a]erit circulus radio H I æqualis circulo ad radium B C; & proinde H I = B C. Item ob similitudinem superficierum D E F, G H I, erit E F. E R :: H I (vel B C). H T: hinc Synthesis. Fac E F. E R :: B C. H T. & sit H T diameter sphæræ; & secetur H T in P, [d] ita ut sit H P. P T :: E N. N R; & per P transeat planum G I ad H T rectum: liquet portionem G H I fore similem ipsi D E F; & esse H I. H T [e] :: E F. E R [f]:: B C. H T. adeóque esse H I = B C. & idcirco circulum radio H I [g] æquari circulo ad radium B C; [h] hoc est superficiem sphæricam G H I superficiei A B C. *Q.E.F.*

a 49. & 50. 1 *h.*
d 10. 6.
e *const.* & *cor.* 8. 6.
f *const.*
g 9. 5.
h 49. & 50. 1 *h.*

Prop. VIII.

Fig 61. *A data sphæra* (B V A D) *plano abscindere portionem* (B V C), *ita ut portio ad conum* (B V C) *habentem eandem cum portione basim* (B A) *& æqualem altitudinem* (V K) *habeat rationem datam* (X *ad* Y).

Quæsita portio sit B V A, & conus B V A; quibus axis communis V K; in quo protracto centrum sphæræ, C; ponatur autem co-
a 3 *hujus.* nus B E A æqualis portioni B V A; [a] unde C D $+$ K D. K D :: E K.
b 14. 12. V K [b] :: con B E A. B V A [c] :: X. Y. dividendóque X—Y. Y :: C D.
c *const.* & 7. 5. K D. unde componitur sic: fiat X—Y. Y :: C D. K D. (adeóque componendo erit X. Y :: CD $+$ KD. KD); per K verò transeat planum B A ad V D rectum; túmque si fiat conus æqualis resectæ porti-
a 14. 12. oni B V A, erit E K. V K ([a] id est con B E A. con B V A) [b] :: C D $+$
b 3. *hujus.* K D. K D [c] :: Y. X. [d] adeóque port. B V A. con B V A :: Y. X.
c *prius.*
d *const.* & 7 5. *Q.E.F.*

Lemma.

Sint utcunque A $\sqsubset$ B, & C $\sqsubset$ D. Erit A $+$ D. B $+$ D. $\sqsubset$ A $+$ C. B $+$ C.

Nam A $\times$: C—D $\sqsubset$ B $\times$: C—D; hoc est A C—A D $\sqsubset$ B C—B D. & transponendo A C $+$ B D $\sqsubset$ B C $+$ A D. ergo utrinque adjungendo A B $+$ C D, erit A C $+$ B D $+$ A B $+$ C D $\sqsubset$ B C
a *sch.* 1 2. $+$ A D $+$ A B $+$ C D, [a] hoc est A $+$ D $\times$: B $+$ C $\sqsubset$ B $+$ D $\times$
* *sch.* 16. 6. A $+$ C. * quare A $+$ D. B $+$ D $\sqsubset$ A $+$ C. B $+$ C.

Prop. IX.

Fig. 62. *Si sphæra* (B V A D) *plano secetur non per centrum, major portio* (B V A) *ad minorem* (B D A) *rationem quidem habet minorem quàm* ***duplam ejus, quam habet majoris portionis superficies ad superficiem minoris; majorem verò quàm sesquialteram.*

a 3 *hujus.* Sit conus B E A = port. B V A. & conus B F A = port. B D A.
* *διπλάσιον.* [a] quare C D $+$ K D K D :: E K. V K. & dividendo C D. K D :: E V.
b *sch.* 17. 6. V K [b] $\sqsubset$ V K. C D (quia C Dq [c] $\sqsubset$ K D $\times$ V K) [d] ergo E V $\sqsubset$ V K,
c 5. 2.
d 14. 5. & E V $\times$ C D [b] $\sqsubset$ V Kq. [e] Est verò C D $+$ V K. K F [f] :: V K. K D
e 3 *h.* & 16. 5. :: E V. C D * $\sqsubset$ E V $+$ V K — C D $+$ V K (E K. C D $+$ V K).
f *prius* & 16. 6. [b] ergo Qu: C D $+$ V K $\sqsubset$ K F $\times$ E K. & [h] proinde Q: C D $+$ V K.
* — 5.
h 8. 5. K Fq $\sqsubset$ K F $\times$ E K. K Fq. [k] hoc est V K q. K Dq $\sqsubset$ E K. K F, hoc
k *sup.* & 1. 6. est

eſt [l] duplicata ratio ſuperficierum BVA. BDA major eſt [m] ratione conorum BEA, B F A ; vel portionum BVA,BFA. quod erat primum. *l 3 cor. 50 huj.* m 14. 12.

Porro fiat X q = E V × C D [p] ⊏ V Kq ; & quia E V. X [q] :: X. C D ; [r] erit E V ∔ X. X ∔ C D :: X. C D. [s] ergo Qu : E V ∔ X. Qu : X ∔ C D :: X q. C Dq [t] :: E V. C D. verùm E V ∔ V K. C D ∔ V K [u] ⊏ E V ∔ X. C D ∔ X. (quia $\frac{EK}{EV \sqsubset CD}$ & X [x] ⊏ V K). ergo E Kq. Qu. C D ∔ V K. ⊏ E V. C D [x] :: C D ∔ V K. K F. pone Z, C D ∔ V K, Y, K F eſſe ∸∸, ergo Zq. Qu: CD ∔ V K [t] :: Z. Y [y] :: C D ∔ V K. K F [x] ⊐ E Kq. Qu : C D ∔ V K. [z] quare Z ⊐ E K. atqui ratio Z ad K F [α] ſeſquialtera eſt rationis C D ∔ V K ad K F. [β] ergo ratio E K ad K F ([γ] hoc eſt coni B E A ad conum B F A, [δ] vel portionis B V A ad portionem B D A) major eſt ſeſquialterâ rationis C D ∔ V K ad K F, [x] vel V K ad K D, [ε] hoc eſt ſuperficiei ſphæricæ B V A ad B D A. ergo ſecundò quoque propoſitum conſtat. p *ſupra.* q 17. 6. r 16.& 18 5. s 22. 6. t 20. 6. u *lemm. præc.* x *ſupra.* y 16. 5. z 10. 5. α *conſt.* β 8. 5. γ 14. 12. δ *conſt.* & 7. 5. ε 3 *cor.* 50 *h.*

Prop. X.

Sphæricarum portionum (A B C, D E F) *ſub æquali ſuperficie contentarum maximum eſt hæmiſphærium* (A B C). Fig. 63, 64.

Sint coni A G C, D H F æquales portionibus A B C, D E F. quare K G [a] = K A. [b] & E M ∔ L O. L O :: L H. L E. ſit M centrum ſphæræ D E F, & E N = B K. ergo 2 E Nq = 2 K Aq [c] = B Aq [d] = E Dq [e] = O E × E L [f] = 2 E M × E L ; quare E Nq [g] = E M × E L. ergo E N media cadit inter puncta M, L ; unde E N × N O [h] ⊏ E L × L O. Additis igitur hinc inde æqualibus E Nq, & E M × E L ; erit E N × E O ([k] hoc eſt E N × N O ∔ E Nq) ⊏ E L × L O ∔ E M × E L [l] = L H × L O. [m] ergo E N. L H ⊏ L O. E O [o] :: O Dq. E Oq [p] :: D Lq. E Dq [q] :: D Lq. 2 K Aq. & antecedentes duplicando 2 E N (K G). L H ⊏ 2 D Lq. 2 K Aq [r] :: D Lq. K Aq. Ponatur igitur K Z. L H :: D Lq. K Aq. [s] eritque K Z ⊐ K G ; [t] & ideo conus A Z C ⊐ con A G C. [u] hoc eſt conus D H F minor cono A G C, [x] vel portio D E F minor portione A B C. *Q.E.D.*

a *cor.* 38. 1 *h.* b 3 *hujus.* c 47. 1. d *hyp.* 1. & 49 *vel* 50 *hujus.* e *cor.* 8. & 17 6. f *conſt.* & 1. 2. g 6. *ax.* 1. h *cor.* 5. 2. k 3. 2. l *ſupra* & 16. 6. n *ſch.* 16. 6. o *cor.* 8 *et* 20. 6. p *cor.* 8. *et* 22 6. q *ſupra* & 7. 5. r 15. 5. s 10. 5. t 14. 12. & 14. 5. u 15. 12. x *conſt.*

ARCHI-



De Circuli *Dimensione.*

Lemma.

Fig. 65. POlygonum ordinatum G H I K L M circulo circumscriptum æquatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo verò radius N P.

Nam radius N P ad contactum ductus tangenti G H perpendicularis est; & si ductis rectis N G, N H, N I, N K, N L, N M polygonum resolvatur in triangula, erit radius N P communis omnium altitudo, [a] proindeque triangula ipsa æqualia erunt; [a] ergo triangulum basin habens parem summæ laterum G H, H I, I K &c. altitudinem verò N P æquabitur illis omnibus, hoc est toti polygono circumscripto.

a 1. 6.

Similiter polygnum A B C D E F inscriptum circulo æquatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo verò perpendicularis N O è centro in unum aliquod latus ducta.

Prop. I.

In fig. præced. Fig. 66. *Omnis circulus* (N) *æqualis est triangulo* (Q R S), *cujus radius* (N P) *æqualis est uni lateri* (Q R) *circa rectum angulum, perimeter verò basi* (R S).

b 1. 1. *de sph. & cyl.* Si negas sit primò triang Q R S $\sqsupset$ $\odot$ N. Circulo N [a] inscribatur polygonum ordinatum A B C D E F, ita ut $\odot$ N—polyg A B C D E F $\sqsupset$ $\odot$ N—triang Q R S; quare polyg A B C D E F $\sqsubset$ triang Q R S; & quoniam ambitus polygoni [b] minor est perimetro circuli, hoc est ipsâ R S, sit ei æqualis R T; & connectatur Q T; cùm itaque sit R Q $\sqsubset$ N O, [c] erit polyg A B C D E F $\sqsupset$ triang Q R T $\sqsupset$ Q R S. verùm erat polyg A B C D E F $\sqsubset$ triang Q R S, quæ repugnant.

c *lemm. præc.*

d 2. 1. *de sph. & cyl.* Sin velis esse triang Q R S $\sqsubset$ $\odot$ N; circulo circumscribatur polygonum G H I K L M [a] $\sqsupset$ triang Q R S; [d] ejus perimeter circuli perimetro major est, sit æqualis R V, & connectatur Q V; [c] ergo polyg G H I K L M = triang Q R V $\sqsubset$ triang Q S R; at erat polyg G H I K L M $\sqsupset$ triang Q R S, quæ repugnant.

Ergo

Ergò potiùs circulus triangulo QRS æquatur; *Q. E. D.*

Breviùs. Circulus eſt quaſi polygonum ordinatum infinitilaterum, in quo radius eſt perpendicularis ad latera, peripheria verò ſumma laterum; unde conſtat è præmiſſo lemmate propoſitum.

Coroll. Si circumferentia dicatur ϖ, diameter δ, radius r, erit $\odot = \frac{r\varpi}{2} = \frac{\varpi}{\delta} rr$.

Lemma. Sit $A.B \sqsubset C.D$; & $B = D$; erit $A \sqsubset C$. Nam ſit A. E :: C. D. [a]ergò $E \sqsubset B$; hoc eſt $E \sqsubset D$; [b]quare $A \sqsubset C$. a 10. 5. b 14. 5.

prop. II.

Omnis circuli perimeter (ϖ) tripla eſt diametri (AD, vel δ), & præterea excedit minori quidem quàm $\frac{1}{7}$ (vel $\frac{10}{70}$), majori verò quàm $\frac{10}{71}$ diametri.

Pars prima.

Dico fore $\varpi . \delta \sqsupset 3\frac{1}{7} . 1$. Ducatur tangens AD; ſitque $\frac{2}{3}$ rect $= \angle ACD = 2 \angle ACE = 4 \angle ACF = 8 \angle ACF = 16 \angle ACH = 32 \angle ACK$. quare 2 ang $ACK = \frac{1}{96}$ 4 rect; unde $2 AK \times 96$ eſt ambitus polygoni circulo circumſcriptibilis, circulo circumferentia major; itaque ſi $2AK \times 96 \sqsupset 3\frac{1}{7} AB$, *liquet hæc pars; id verò ſic oſtenditur: * 8. 5.

Ob ang $ACE = \frac{1}{3}$ rect. eſt CE [a] $= 2EA$; & ob ang. $ACE = 2ACF$, eſt $CE . CA$ [b] :: $EF . FA$; & componendo $CE + CA . CA :: EA . FA$; permutandóque $CE + CA . EA :: EA . FA$: ſimili diſcurſu eſt a 3 cor. 12. 13. b 3. 6.

$$\left.\begin{matrix} CF \\ CG \\ CH \end{matrix}\right\} + CA . \begin{matrix} FA \\ GA \\ HA \end{matrix} :: CA . \left\{\begin{matrix} GA. \\ HA. \\ KA. \end{matrix}\right.$$

Ponatur $CE = 306$; quare $EA = 153$; ac [c]CA ($\sqrt{CEq - EAq}$) $= \sqrt{93636 - 23409} = \sqrt{70227} \sqsubset \sqrt{70225} = 265$. [d]ergo $571 (306 + 265) . 153 . \sqsupset CE + CA . EA :: CA . FA$; itaque poſito $FA = 153 = \sqrt{23409}$, [e]erit $CA \sqsubset 571 = \sqrt{326041}$; adeóque $CFq \sqsubset 23409 + 326041 = 349450 \sqsubset 349428 \frac{49}{64} = q. 591\frac{1}{8}$. c 47. 1. d 8. 5. e lemm. præc.

Hinc $1162\frac{1}{8} (591\frac{1}{8} + 571) . 153$ [d] $\sqsupset CF + CA . FA :: CA . GA$; quare poſito jam $GA = 153$, [e]erit $CA \sqsubset 1162\frac{1}{8} . = \sqrt{1350534\frac{33}{64}}$; & ideo $CGq \sqsubset 23409 + 1350534\frac{33}{64} = 1373943\frac{33}{64} \sqsubset 1373720\frac{49}{64} = q. 1172\frac{1}{8}$.

Igi-

Igitur $2334\frac{1}{4}$ ($1172\frac{1}{8}$ + $1162\frac{1}{8}$). 153 [d] ⊐ CG + CA. GA :: CA. HA; ergo si rursus ponatur HA = 153; [e] erit CHq ⊏ q. 153 + q. $2334\frac{1}{4}$ = 23409 + $5448723\frac{1}{16}$ = $5472132\frac{1}{16}$ ⊏ $5472028\frac{1}{16}$ = q. $2339\frac{1}{4}$. Itaque denuo $4673\frac{1}{2}$ ($2339\frac{1}{4}$ + $2334\frac{1}{4}$). 153 [d] ⊐ CH + CA. HA :: CA. KA; ergo si ponatur KA = 153, [e] erit CA ⊏ $4673\frac{1}{2}$; quare AB. 2KA ⊏ $4673\frac{1}{2}$. 153.
f 15. 5. vel inversè 2 KA. AB ⊐ 153. $4673\frac{1}{2}$. [f] ergo 94 × 2KA. AB ⊐ 94 × 153. $4673\frac{1}{2}$; hoc est ⊐ 14688. $4673\frac{1}{2}$ ⊐ $14688\frac{6}{7}$. $4673\frac{1}{2}$ :: $3\frac{1}{7}$. 1. quare liquet prima pars.

Pars secunda.

Dico fore π. δ ⊏ $3\frac{10}{71}$. 1. Sit $\frac{1}{6}$ π = arc AD = 2 arc AE = 4 arc AF = 8 arc AG = 16 arc AH; quare AH = $\frac{1}{96}$ π; unde 96 AH est ambitus inscriptibilis polygoni perimetro circuli minor;
* 8. 5. quòd si igitur sit 94 AH. AB. ⊏ $3\frac{10}{71}$. 1; * liquebit fore magis π. δ ⊏ $3\frac{10}{71}$. 1. illud verò sic constat.

Fig. 69. Ducantur rectæ BD, BE, BF, BG, BH; & AD, AE, AF, AG, AH; & ob ang ABD = 2 ABE, est DB. BA [h] :: DX. KA; &
h 3. 6. componendo DB + BA. BA :: DA. KA; permutandóque DB
k 4. 6. + BA. DA :: BA. KA [k] :: BE. EA. (nam ob [l] similia triangula
l 27. 3. EBA, EAK est BA. KA [h] :: BE. EA).

Simili discursu est EB, FB, GB + BA. EA, FA, GA :: BF. FA, BG. GA, BH. HA.

Simili discursu est EB		EA.	BF. FA.
FB	+ BA.	FA. ::	BG. GA.
GB		GA.	BH. HA.

Sit BA = 1560. ergo CA (DA) = 780; & DBq (BAq —
m 8. 5. ADq) = 1825200 ⊐ 1825201 = q. 1351. [m] ergo 2911) 1560 + 1351). 780 ⊏ DB + BA. DA :: BE. EA; quare si pona-
n lemm. prec. tur EA = 780, [n] erit BE ⊐ 2911; & BAq (BEq + EAq) ⊐ 9082321 ⊐ q. $3013\frac{3}{4}$.

[m] Quare $5924\frac{3}{4}$ (2911 + $3013\frac{3}{4}$). 780. (hoc est 1823. 240) ⊏ EB + BA. EA :: BF. FA; unde si FA ponatur 240, [n] erit BF ⊐ 1823. & BAq (FAq + BFq) ⊐ 3380929 ⊐ q. $1838\frac{9}{11}$.

Unde iterum $3661\frac{9}{11}$ (1823 + $1838\frac{9}{11}$). 240 (hoc est 1007. 66) [m] ⊏ FB + BA. FA :: BG. GA; quare posito GA = 66, [n] erit BG ⊐ 1007; & BAq (GAq + BGq) ⊐ 1018405 ⊐ q $1009\frac{1}{6}$.

Itaque denuo $2016\frac{1}{6}$ (1007 + $1009\frac{1}{6}$). 66 [m] ⊏ GB + BA. GA :: BH. HA; unde si ponatur HA = 66, [n] erit BH ⊐ $2016\frac{1}{6}$; & BAq (HAq + BHq) ⊐ $4069284\frac{1}{36}$ ⊐ q. $2017\frac{1}{4}$. ergo BA.

AH

A H $\sqsupset$ $2017\frac{1}{4}$. 66; vel inversè A H. B A $\sqsubset$ 66. $2017\frac{1}{4}$. [p] quare p 15. 5.
96 A H. B A $\sqsubset$ 94×66. $2017\frac{1}{4}$ (hoc est, 6336. $2017\frac{1}{4}$ :: $3\frac{1205\frac{7}{}}{8071}$. 1.) quare 96 A H. B A $\sqsubset$ $3\frac{1205\frac{7}{}}{8071}$ 1 $\sqsubset$ $3\frac{10}{71}$. 1. unde constat propositum.

Coroll. Hinc π. δ :: 22. 7, ferè.

Prop. III.

Circulus ad suæ diametri quadratum rationem habet eandem (ferè), quam 11 *ad* 14.

Nam $\delta\pi$. $\delta\delta$ [a] :: π. δ [b] :: 22. 7. ergo $\frac{\delta\pi}{4}$ ($\odot$). $\delta\delta$ :: $\frac{22}{4}$. 7 :: $\frac{44}{4}$. 14 (hoc est) :: 11. 14.

a 1. 6.
b *cor.* 2. *huj.*

Cyclometriam longiùs, & ad majorem ἀκρίβειαν promovit posteriorum industria. Consulantur *Vietæ*, *Ludolphi à Ceulen*, *Metii*, *Snellii*, *Hugenii* lucubrationes: ad crassiores saltem usus sufficit hæc *Archimedea* Circuli dimensio.



De Spiralibus, *seu* Helicibus.

Archimedes Dositheo S.

T*Heorematum ad Cononem transmissorum*, pro quibus assiduè literis à me contendis ut demonstrationes conscribam, plerorumque quidem scriptas habes in iis quas *Heraclides* pertulit; ipsorum verò quasdam etiam in hoc libello scriptas ad te mitto. Nè mireris autem, quòd post diutiorem temporis moram eorum demonstrationes edimus. Hoc enim accidit fieri, quia priùs voluerim iis exhibere, qui in Mathematicis occupantur, & ea libenter perscrutari volunt: * quales enim in *Geometria* speculationes, non bene tractabiles initio visæ, tempore elaboratæ perfectiorem accipiunt? *Conon* certè non sufficiens ipsorum inquisitioni tempus nactus vitam commutavit, obscuritate involuta relinquens; cùm & hæc omnia reperisset, & alia multa pervestigâsset, longiusque promovisset *Geometriam*: scimus enim in illo fuisse non mediocrem Mathematum peritiam, nec non industriam eximiam: à *Cononis* autem excessu cùm anni plures effluxerint, Problematum nullum à quovis percepimus solicitari. Volo autem eorum unumquodque singillatim producere * * * ut redarguantur qui præ se ferunt omnia invenisse, nullam proferentes eorum de-

vel quot: *fortè legendum* πόσα *pro* ποῖα.

Hîc in editis libris interseruntur hæc verba: καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ μὲν κεχωρισμένα· τέλος δὲ ποτ' ἐσσομένων. *quorum mentem assequi nequeo. Locus proculdubio mendosus & mutilus: è conjectura sic interpolata redderem: lego* καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ εἶναι κεχωρισμένα· τέλος δὲ ποτθήσομεν. Contigit enim duo quædam eorum quæ in illo (*Cononis* scripto) separatim apposita sunt, falsa esse; * ποτίθει *pro* προσίθει, *vel* προσίθεσι. *Habetur apud Theocr. Idyl.* 14 *v.* 45. *imò infra hic. prop.* 4. quæ quidem ultimò in fine proponemus, ut &c.

mon

monstrationem, *interdumque quæ impossibilia sunt profitentes invenisse: hæc autem quænam Problemata sunt; & *quorum missas habes demonstrationes; & quænam in hoc libro perlata *comprobamus*, tibi declarabo. Primum itaque Problematum fuit: *Sphærâ datâ, spatium planum invenire sphæræ superficiei æquale:* quod quidem primò manifestum evasit *edito de Sphæra libro*; quippe cùm ostensum sit, *quòd omnis sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli eorum qui in sphæra*; liquet quomodo possibile sit invenire planum spatium æquale superficiei sphæræ. Secundum verò: *Dato cono vel cylindro, sphæram invenire æqualem cono vel cylindro.* Tertium verò: *Datam sphæram plano secare, ita ut ejus portiones inter se præstitutam habeant rationem.* Quartum autem: *Datam sphæram plano secare, ita ut superficiei portiones assignatam inter se rationem habeant.* Quintum verò: *Datam sphæræ portionem datæ sphæræ portioni assimilare.* Sextum verò: *duabus sphæræ, seu ejusdem seu diversæ, portionibus datis; invenire sphæræ portionem quandam, quæ sit ipsa quidem uni segmentorum similis, superficiem verò æqualem habeat superficiei alterius portionis.* Septimum: *A data sphæra portionem resecare plano, ita ut portio ad conum basin habentem eandem cum portione, & altitudinem æqualem præstitutam habeat rationem, non majorem illa, quam habent tria ad duo.* Horum quidem modò dictorum omnium demonstrationes pertulit *Heraclides.* Quod autem post hæc separatim appositum: falsum erat; est autem hujusmodi: *Si sphæra plano secetur in inæqualia portio major ad minorem duplicatam habet rationem ejus, quam habet major superficies ad minorem.* Quod verò hoc falsum sit, ex antea missis manifestum est. Quin seorsim istis adscrip- 9 *11. de sph.*
tum erat & hoc: *Si sphæra plano secetur inæqualiter, ad rectos diametro cuidam ex iis qui in sphæra, portio major ad minorem eandem obtinebit rationem, quam diametri pars major* *Ibid.*
ad minorem: major enim portio sphæræ ad minorem habet

* ἃ ποθ', *lego* οἵ ποθ'.

* τίνων ὧν, *deleo* ὧν.

 bet

bet minorem quidem quàm duplicatam rationem ejus quam habet major superficies ad minorem, majorem verò quàm sesquialteram. Erat verò sepositorum problematum ultimum etiam falsum: *quòd, si sphæræ alicujus diameter secetur, ita ut quod à majori segmento fit quadratum triplum sit quadrati, quod à segmento minori, perque sectionis punctum actum planum diametro perpendiculare sphæram secet, erit talis specie figura, qualis est major sphæræ portio, maxima portionum quarumvis aliarum æqualem habentium superficiem. Quòd autem hoc sit falsum, constat ex antea missis theorematis:* etenim demonstratum est, *quòd hæmisphærium maxima est portionum, sub æquali comprehensarum superficie.* Post hæc verò de cono proposita sunt & hæc: si rectanguli coni sectio manente diametro circumvolvatur, ita ut diameter sit axis; à rectanguli coni sectione descripta figura vocetur *Conoides*; & si conoideam figuram planum contingat; plano verò contingenti ductum parallelum aliud planum conoidis aliquam portionem abscindat, abscissæ quidem portionis basis appelletur planum abscindens, vertex verò punctum, ad quod aliud planum *conoides* tangit. Quinetiam si dicta figura plano secetur ad axem recto, quod sectio quidem circulus erit perspicuum est; *Quòd verò resecta portio sesquialtera erit coni basin habentis eandem cum portione, & æqualem altitudinem*, demonstrare oportet. Ac si *Conoidis* duæ portiones planis resecentur utcunque ductis, quòd equidem sectiones erunt *oxygoniorum conorum* sectiones, patet; siquidem resecantia plana non sint ad axem recta: quòd verò portiones hanc inter se rationem habent, quam potentiâ inter se habent quæ ab ipsarum verticibus ducuntur axi parallelæ usque ad secantia plana, demonstrandum est. Horum autem demonstrationes *ita tibi mandantur: post ista verò de *Helice* proposita fuerunt hæc. Est verò quasi genus aliud problematum, *nihil habens commune cum prædictis: de

vid. 26.

** ἔστω. forte subest aliquid errati.*

** lego ἐπίκοινον ἔχοντα pro ἐπινάρα, ἐόντα.*

de quibus in hoc ipso libello demonstrationes tibi conscripsi. Sunt autem hæc: [illa subjungit, quæ habentur infrà in Prop. 24. 18. 27. 28.] Horum à me, & aliorum de Helice demonstrationes in hoc libello scribuntur.

PRæmittuntur autem, sicut & aliis Geometricis, *quæ usum habent ad ipsorum demonstrationem. Assumo verò & in his, ex iis quæ in libris extant antehac editis, hæc lemmata. *Inæqualium linearum &c.

*Innuit II. primas propositiones, quæ lemmaticæ sunt, et sequentium demonstrationi præstratæ. * Vide 5. ax. libri I. de sph. & cyl.

Prop. I.

Si in aliqua linea (A G) *feratur punctum quoddam æquè sibi ipsi velociter latum, & sumantur in illa duæ lineæ* (A B, B G); *sumptæ eandem inter se rationem habebunt, quam tempora, in quibus punctum rectas transierit.* Fig. 69. 70.

Tempora repræsententur à rectis $\alpha\beta, \beta\gamma$. & * sumantur B M, B N utcunque multiplices rectarum B A, B G; & $\beta\mu, \beta\nu$ pariter multiplicia temporum $\beta\alpha, \beta\gamma$: & quia motus [a]æquè veloces sunt, erit $\beta\mu$ tempus motûs continuati per B M; & $\beta\nu$ tempus motûs per B N. Quòd si recta B M major sit rectâ B N, liquet (ob motûs suppositam ἰσοτάχειαν) esse tempus $\beta\mu$, quo peragitur B M, majus tempore $\beta\nu$, quo peragitur B N; & simili ratione si B M $\overset{=}{\sqsupset}$ B N, esse correspondenter $\beta\mu \overset{=}{\sqsupset} \beta\nu$. [d] unde erit A B. B G :: $\alpha\beta. \beta\gamma$. *Q. E. D.*

* post. a hyp. d 5 def. V.

Prop. II.

Si duorum punctorum utroque secundùm lineam quandam, non per unam eandem, æquè sibimet velociter lato; sumantur in utraque linea duæ lineæ (A B, B C, & L M, M N) *& tùm primæ* (A B, L M) *in æqualibus temporibus a punctis transigantur, tum etiam secundæ* (B C, M N); *eandem inter se rationem habebunt sumptæ lineæ.* Fig. 71. 72.

Lationis per A B, & L M tempus sit X; & lationis per B C, M N tempus sit Y; éstque A B. B C [a]:: (X. Y [a]::) L M. M N. *Q.E.D.*

a 1 hujus. Prop.

Prop. III.

Datis quotlibet circulis, recta sumi potest major circumferentiis circulorum.

a per aliquam 4ti elem. b 2.1. de sph.

Circulis [a] circumscribantur polygona quævis, [b] liquet rectam eorum perimetris æqualem circulorum excedere circumferentias,

Prop. IV.

Datis duabus lineis inæqualibus rectâ (R) *& circuli circumferentia* (P), *sumi potest recta, minor quidem datarum linearum majore, major autem minore.*

a 5 ax.1.de sph. b constr. c 7 ax.1. d 4. ax. 1. e 5. ax. 1.

Hoc è quantorum homogeneitate, & adeò ab excessûs divisibilitate satis perspicuum est. Sed cum auctore, sit alterutra R major; & excessus R—P multiplicatus per aliquem numerum N [a] excedat R. Erit $R - \frac{R}{N} \sqsubset P$. Nam quia $R - P \times : N$ [b] $\sqsubset R$. [c] erit $R - P \sqsubset \frac{R}{N}$. ergo transponendo R [d] $\sqsubset \frac{R}{N} + P$. [e] & $R - \frac{R}{N} \sqsubset P$. *Q.E.F.*

Prop. V.

Fig. 73.

Dato circulo, & recta (B T) *tangente circulum, potest à circuli centro* (A) *duci recta* (A T) *ad tangentem, ita ut à tangente & circuli circumferentia intercepta recta* (D T) *ad radium* (A D) *minorem rationem habeat, quàm circuli arcus* (B D) *qui est inter contactum* (B) *& eductam* (A T) *ad datam quamcunque circuli circumferentiam* (P).

a 3 hujus. Fig. 74. a 4.6. b 1.ax.1.de sph. & 8.5. c const. & 8,5.

Accipiatur recta quapiam X [a] major quàm P; & agatur diameter N M ad B T parallela, cui occurrat recta B D secans circulum in D, ita ut intercepta D F major sit quàm X (id quod fieri potest, quoniam sic interceptæ ab M versùs partes F crescunt ad infinitum). Jam trajectâ A T per D, dico factum. Nam T D. D A ([a]:: B D. D F [b] $\sqsupset$ arc B D. D F [c] $\sqsupset$ arc B D. X) [c] $\sqsupset$ arc B D. P.

Prop. VI.

Fig. 75.

Dato circulo, & in circulo rectâ (Z D) *quæ sit minor diametro, potest à circuli centro* (A) *ad peripheriam projici recta* (A G) *secans datam*

tam in circulo rectam (Z D), ita ut recta (G H) inter peripheriam & rectam in circulo datam comprehenſa ad conjunctam (G Z) à termino (G) projectæ, qui eſt in peripheria ad alteram extremitatem (Z) datæ in circulo rectæ, præſtitutam habeat rationem (R ad S); modò tamen data ratio minor ſit ea, quam habeat dimidia (Z E), datæ in circulo ad ductam è centro ipſi perpendicularem (A E).

Ducatur diameter N M ad D Z parallela, cui occurrat tangens ZS, & connectatur A Z; & ob angulos A Z E, Z A S [a] paret, & [b] rectos Z E A, A Z S, erunt triangula Z E A, A Z S ſimilia. [c] unde A Z. Z S :: Z E. A E [d] ⊏ R. S. fiat R. S :: A Z. X; [e] ergo X ⊏ Z S. Igitur ſi per Z (quod fieri poſſe *conſtat) tranſeat recta, ſecans circulum in G; ſic ut inter diametrum & G intercepta G K æquetur ipſi X (ſecabit autem ad partes D, quia G K ⊏ Z S, & angulum S Z M nulla ſecet major quam S Z); & connectatur A G; quoniam G H. G Z :: [c] G A (Z A). G K [f] :: Z A. X [g] R. S [h] :: G H. G Z, conſtat propoſitum. * a 29. 1. b *hyp* & 16. 3. c 4. 6. d *hyp.* e 10. 5. * *Id nos alibi, quo modo fieri poſſit, oſtendimus.* f *conſt.* & 7. 5. g *conſtr.* h 11. 5.

* *ſch. ad 6. Vides conditionem apponi meritò: nam ſi eſſet* G H. G Z (*vel* G A. G S) :: R.S :: Z E. A E :: Z A. Z S. *eſſent* G S, Z S *æquales*; q. f. n.

Prop. VII.

Iiſdem datis, & rectâ (D Z) protractâ poteſt è centro recta (A H) educi, ita ut quæ (G H) fuerit inter peripheriam & protractam ad conjunctam (G Z) à termino interceptæ ad terminum protractæ propoſitam habeat rationem (R ad S), dummodo data ratio major fuerit eâ, quam habet dimidia (Z E) datæ in circulo ad ductam è centro ipſi perpendicularem (A E). Fig. 75.

Ducatur enim tangens Z S, & connectatur A Z, & cætera ut in præcedenti. Eſtque Z A. Z S [a] :: Z E. A E [b] ⊐ R. S. fiat R. S :: Z A. X; erit ideo X ⊐ Z S. itaque ducatur Z K, ita ut intercipiatur G K = X (quod conſtat fieri poſſe intra angulum A Z S) éſtque G H. G Z [a] :: A G (A Z) G K [c] :: A Z. X [d] :: R. S :: [e] G H. G Z. ergo factum. a 4. 5. b *hyp.* c *conſt.* & 7. 5. d *conſt.* e 11. 5.

Prop. VIII.

Dato circulo, & in circulo rectâ (Z D) quæ minor diametro, & aliâ (Z S) tangente circulum ad in circulo datæ terminum (Z), poteſt à circuli centro (A) projici recta quædam (A L), ita ut pars ejus (H G) accepta inter circumferentiam circuli, ac datam in circulo rectam ad Fig. 76.

partem

partem (L Z) *à tangente interceptam habeat propositum rationem* (R *ad* S) ; *siquidem data ratio sit minor eâ quam habet semissis* (Z E) *datæ in circulo ad ductam è circulo ipsi perpendicularem* (A E).

a 4. 6.
b *hyp.*
c 10. 5.
d 5. 4.
e 4. 6.
f 16. 6.
g 35. 3.
h 7. 5.
k 1. 6.
l *const.* & 7. 5.
m 35. 3. & 16. 6.
n 7. 5.
o 11. 5.
p 19. 5.
q *const.*

Sit diameter N M ad D Z parallela, tangenti L Z occurrens in S ; fiátque R. S :: A Z. Z T. unde cùm sit A Z. Z S [a] :: Z E. A E [b] ⊐ R. S. [c] erit Z T ⊏ Z S. Per puncta A, S, T [d] ducatur circulus, quem secet A Z producta in Y, ducatúrque A X, sic ut L X = Z Y (quod fieri posse constat ad alteras partes diametri AP, transeuntis inter Z, T ; ob Z T ⊏ Z S, & angulum A Z T rectum) hæc autem (A X) tangentem secet in L, circulum primò positum in G, rectam Z D in H. Dico factum.

Nam L A. H A :: [e] L S. Z S. [f] unde L A × Z S = H A × L S. Item L T × L S [g] = L A × L X. [h] quare L T × L S. H A × L S ([k] LT. H A) :: L A × L X. L A × Z S [k] :: L X. Z S [l] :: Z Y. Z S [m] :: Z T. Z A [n] :: Z T. A G. [o] :: L T. H A [p] :: Z T — L T. A G — H A (hoc est) :: L Z. G H. ac invertendo G H. L Z :: (Z A. Z T [q] ::) R. S. *Q.E.F.*

Prop. IX.

Fig. 77. *Iisdem datis, ac in circulo datâ lineâ* (D Z) *protractâ, potest è centro circuli ad protractam educi recta* (A H) ; *ita ut quæ* (G H) *est inter peripheriam & productam ad interceptam* (L Z) *ex tangente ad contactum, præsignatam sortiatur rationem* (R *ad* S), *si modò data ratio major sit eâ, quam habet datæ in circulo semissis* (Z E) *ad ductam ipsi è centro perpendicularem* (A E).

Construitur & demonstratur eodem prorsus modo quo præcedens ; tantùm hîc faciendo A Z. Z T :: R. S, evadit Z T ⊐ Z S ; & inde recta A H occurrit circulo infra tactum ad partes S. quid plura ?

Vides in duobus his problematis desiderari, ut intercipiatur L X = Z Y, id quod præstari potest ope primæ conchoidis, cujus polus A, chorda S T, sagitta Z Y ; ejus enim cum circulo A S T intersectio determinabit punctum X. at per conicas quoque sectiones idem effici potest, utpote solidum Problema.

Prop. X.

Fig. 78. *Si lineæ quotcunque ponantur deinceps æquali sese excedentes* (a, b, c, d, e, f) *fuerit autem excessus æqualis minimæ* (a) ; *& aliæ lineæ ponantur, multitudine quidem æquales illis, magnitudine verò singulæ æquales*

quales maximæ (l); quadrata ab æqualibus maximæ assumentia quadratum ex maxima, & comprehensum (rectangulum) à minima & æquali omnibus sese æqualiter excedentibus, tripla erunt omnium quadratorum ab illis, quæ sese excedunt. $7ff + fa + ea + da + ca + ba + aa = 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + 3ff.$

Clariùs forsan & breviùs exprimatur, si sit quæcunque series æqualiter se continuò excedentium, incipiens à puncto (seu nihilo) inclusivè, tripla summa quadratorum ex his adæquabitur summæ quadratorum è totidem æqualibus maximæ, unà cum rectangulis è minima in omnes.

Nam summa quadratorum è tot æqualibus [m] maximæ est. m 4. 2.

ff

o $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ f$ — $aa + ee + {}^{*}2ae\ ({}^{*}2ae.$

o 1. 2. 3. 4. 5. 6. — $bb + dd + {}^{*}2bd\ ({}^{*}4ad.$ ob $b = 2a.$

6. 5. 4. 3. 2. 1. o. — $cc + cc + {}^{*}2cc\ ({}^{*}6ac.$ ob $c = 3a.$

$dd + bb + {}^{*}2db\ (8ab.$ ob $d = 4a.$

$ee + aa + {}^{*}2ea\ (10aa.$ ob $e = 5a.$

ff

Item $ff^{*} = {}^{n}6af^{\dagger} = {}^{n}af + 2ae + 2ad + 2ac + 2ab + 2aa = ff.$

Similiq; discursu, $ae + 2ad + 2ac + 2ab + 2aa = ee$

$ad + 2ac + 2ab + 2aa = dd$ — * ob $f = 6a.$

$ac + 2ab + 2aa = cc$ — † ob $5f = 2e + 2d + 2c + 2b + 2a.$

$ab + 2aa = bb$

$aa = aa$

Horum summa est, $af + 3ae + 5ad + 7ac + 9ab + 11aa.$ n 1. 2.

Quæ quidem summa excedit summam rectangulorum supra positam per $af + ae + ad + ac + ab + aa$. quod si igitur adjiciatur hic excessus summæ quadratorum suprà collocatæ, perspicuum est conflari $3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + 3ff$. Consimilis discursus cuilibet accommodari possit linearum multitudini.

Corollaria.

1. Itaque constat hinc quòd omnia quadrata ab æqualibus maximæ eorum quæ ab æqualiter sese excedentibus minora sunt, quàm tripla.

2. Reliquorum verò dempto maximæ quadrato majores sunt quàm tripla, hoc est esse $6ff \sqsubset 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee$, quia scilicet $ff = 6af \sqsubset af + ae + ad + ac + ab + aa$, adeóque ex superiore æquatione hinc auferendo $ff + af + ae + ad + ac + ab + aa$,

illinc $2ff$ remanebit $6ff \sqsubset 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + ff$.

3. Quinetiam ideo ſi ſimiles figuræ deſcribantur, tum ab omnibus ſeſe æqualiter excedentibus, tum ab æqualibus maximæ; figuræ ab æqualibus maximæ minores quidem erunt quàm triplæ earum, quæ ab æqualiter ſeſe excedentibus, reliquarum vero demptâ figurâ quæ fit à maxima majores quàm triplæ: nam quadratorum & ſimilium figurarum eadem prorſus eſt ratio.

Schol. Hinc pro cognoſcenda quadratorum cujuſcunque progreſſionis Arithmeticæ ſumma regulæ emergunt notatu dignæ.

1. Si ſeries incipiat ab o, primúſque poſt o terminus ſit a, ultimus verò (ſeu maximus) ſit f; & terminorum numerus dicatur n; erit $\frac{nff}{3} + \frac{nfa}{6}$ (vel $\frac{2nff + nfa}{6}$) æqualis ſummæ quadratorum. Nam $\frac{nf}{2}$ æquatur ſummæ terminorum (id clariſſimè cernis in hujuſce propoſitionis figura) ergo $nff + \frac{nfa}{2}$ æquatur triplæ ſummæ quadratorum.

Hinc erit tripla ſumma quadratorum. ad ſummam quadratorum è totidem æqualibus maximo. ut $f + \frac{a}{2}$ ad f, vel ut $1 + \frac{a}{2f}$ ad 1.

2. Si ſeries incipiat ab o, & primus ab eo terminus ſit 1; erit ſumma quadratorum $\frac{nff}{3} + \frac{nf}{6}$. (è priore).

Hinc ſumma quadratorum tripla, ad ſummam quadratorum è totidem æqualibus maximo, ut $2n - 1$ ad $2n - 2$.

Nam $nff + \frac{nf}{2}. nff :: f + \frac{1}{2}. f :: n - 1 + \frac{1}{2}. n - 1$ (ob $f = n - 1$) $:: n - \frac{1}{2}. n - 1 :: 2n - 1. 2n - 2$.

Item illa ad hanc ſe habet ut $1 + \frac{1}{2n-2}$ ad 1.

3. Eodem poſito, erit ſumma quadratorum $\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$; vel $\frac{n^3}{3} - \frac{nn}{2} + \frac{n}{6}$. Nam ob $n - 1 = f$ erit $nn - 2n + 1 = ff$. quare $2nff = 2n^3 - 4nn + 2n$. & $nf = nn - 1$ quæ collecta dant $2n^3 - 3nn + n$.

4. In quacunque Progreſſione, ſi minimus terminus ſit a, exceſſus x erit ſumma quadratorum $\left.\begin{matrix} naa - nn \\ - n \end{matrix}\right\} ax$ $+ \frac{2n^3 - 3nn + n}{6} xx$.

Nam ſumma quadratorum eſt $aa + 0 + 0$

$a.\ a + x.\ a + 2x.\ a + 3x$ $\quad$ $aa + 2ax + xx$

$aa + 4ax + 4xx$

$aa + 6ax + 9xx$

Summa $\left. \begin{matrix} naa + {}^{*}nn \\ - n \end{matrix} \right\} ax$ $\quad$ $\dfrac{+2n^3 - 3nn + n}{6} xx$

* Nam ſumma 0.2.4.6. $= nn - n$.

5. Ex his porro colligitur in iſtis progreſſionibus quæ à nihilo incipiunt, quo major eſt terminorum numerus, eò quadratorum ex inæqualibus ſummam triplicatam, ad æqualitatem cum ſumma quadratorum è totidem æqualibus maximo propiùs accedere, nam ſi pro f ſubſtituatur ea major quilibet g, quia $1 + \frac{a}{2g} \sqsupset 1 + \frac{a}{2f}$ liquet triplam ſummam quadratorum ex illis quorum maximus terminus eſt g, minus inæqualem eſſe ſummæ quadratorum è totidem æqualibus maximo, quam ubi maximus terminus eſt f.

6. Adeóque ſi numerus terminorum infinitus ſit, tripla ſumma quadratorum ex inæqualibus juſtè adæquabitur quadratis è maximo, nam ſi ultimus terminus ſit Z, erit $\frac{a}{zz} = 0$ quia a ad z (nedum ad zz) nullam habebit proportionem. Cæterùm fontem hìc uberrimum aperuit *Archimedes*, à quo plurimi in fundum Mathematicum fluvii redundârunt.

Pertentando colligetur iſthoc hoc pacto.

Series 1ª. 0. 1. tripla 3. / 2 × 1 == 2. } ratio $1\frac{1}{2}$. 1.

Series 2ª. 0. 1. 4: tripla 15 / 3 × 4 === 12 } ratio $1\frac{1}{4}$. 1.

Series 3. 0.2.4.9. tripla 42 / 4 × 9 === 36 } ratio $1\frac{1}{6}$. 1.

Series 4. 0.1.4.9.16. tripla 90. / 5 × 16 ===== 80. } ratio $1\frac{1}{8}$. 1

Eodem modo procedit ratio ad infinitum, versùs æqualitatem vergendo.

Prop. XI.

Si lineæ continuò ponantur quotlibet (Z A, Z B, Z C, Z D) *æquali ſeſe excedentes; & aliæ lineæ ponantur* (*Z D, Z E, Z F) *multitudine quidem unâ minores æqualiter ſeſe excedentibus, magnitudine verò ſingulæ æquales maximæ* (Z D); *quadrata omnia ab æqualibus maximæ*

*vel ZE, ZF, Z G.

$DZq + EZq + FZq$ *ximæ ad quadrata sese æqualiter excedentium sine mini-*
$DZq + CZq + BZq \sqsupset$ *ma (ZA) minorem rationem habebunt, quàm quadratum*
$DZq.\ DZ \times AZ + \frac{DAq}{3}$ *maximæ ad æquale utrique, tum comprehenso sub maxima, & minima, tum tertiæ parti quadrati excessûs, quo maxi-*
$EZq + FZq + GZq.$ *ma excedit minimam; ad quadrata verò sese æqualiter*
$CZq + BZq + AZq. \sqsubset$ *excedentium sine quadrato maximæ majorem eâdem ratio-*
$EZq.\ EZ \times AZ + \frac{EAq}{3}$ *ne.*

Est enim $AZ \times: DZ + EZ + FZ + \frac{DAq + EAq + FAq}{3}$

a 3.2. et 1. ax. 1 [a] $= AZq + AZq + AZq + AZ \times: DA + EA + FA: + \frac{DAq + EAq + FAq}{3} \sqsupset AZq + AZq + AZq: + AZ \times: 2DA + 2CA + 2BA: + DAq + CAq + BAq$ (quia scili-

b 1 cor. 10. h. cet $DA + EA + FA \sqsupset 2DA + 2CA + 2BA$; [b] &

c 4.2. & 2. ax. 1. $\frac{DAq + EAq + FAq}{3} \sqsupset DAq + CAq + BAq$) [c] $= DZq +$

d 8. 5. $CZq + BZq$. [d] ergo $DZq + EZq + FZq.\ DZq + CZq + BZq \sqsupset (DZq + EZq + FZq.\ AZ \times: DZ + EZ + FZ +$

e 12. 5. $\frac{DAq + EAq + FAq}{3}$ [e] $::)\ DZq.\ AZ \times DZ + \frac{DAq}{3}$.

Similem adhibendo discursum, quoniam $EA + FA + GA \sqsubset 2CA + 2BA$; & $\frac{EAq + FAq + GAq}{3}$ [g] $\sqsubset CAq + BAq$;

g 2 cor. 10 h. erit $AZ \times: EZ + FZ + GZ + \frac{EAq + FAq + GAq}{3}$

h 8. 5. $\sqsubset CZq + BZq + AZq$. [h] quare $EZq + FZq + GZq.\ CZq$

k 12. vel 15. 5. $+ BZq + AZq \sqsubset (EZq + FZq + GZq.\ AZ \times: EZ + FZ + GZ + \frac{EAq + FAq + GAq}{3}$ [k] $::)\ EZq.\ AZ \times EZ + \frac{EAq}{3}$.

Coroll.

Et proinde si similes figuræ describantur ab omnibus, tam ab inæqualiter sese excedentibus quàm ab æqualibus maximæ; figuræ omnes, quæ ab æqualibus maximæ ad illas quæ ab æqualiter sese excedentibus, sine figura quæ à minima, minorem rationem quàm quadratum à maxima ad æquale utrique simul & comprehenso sub maxima

ac

ac minima, & tertiæ parti ejus quod est ab excessu, quo maxima exsuperat minimam; ad eas verò quæ ab iisdem sunt figuras sine illa quæ à maxima, majorem eâdem ratione.

Schol.

Si $DA = ZA$, vel $ZD = 2\,ZA$, liquet esse $ZDq.\ ZD \times ZA + \frac{DAq}{3} :: 12.\ 7.$ [a]vel $3\,ZDq.\ 3\,ZD \times ZA + DAq :: 12.\ 7.$ Nam $3\,ZDq$ [b]$= 12\,ZAq.$ & $3\,ZD \times ZA$ [c]$= 6\,ZAq$, & DAq [d]$= ZAq.$ a 15.5. b 4.2. c 1.6. d hyp.

Definitiones.

I.

Si in plano recta linea (AZ) manente altero termino (A) æquali velocitate circumlata, restituatur denuo (istuc) unde profecta est; simul verò cum linea circumducta feratur punctum æquèvelociter sibi ipsi, secundùm rectam (AZ), incipiens à manente termino (A); punctum helicem describet. Fig. 80.

Schol.

Itaque si dividatur recta AZ in quotcunque partes æquales A*b*, *bc*, *cd*, &c. & circumferentia à puncto B descripta in partes totidem æquales, ac ductis à centro A ad circumferentiæ divisiones radiis, auferantur AB, AC, AD, &c ipsis A*b*, A*c*, A*d* &c ordine æquales, per puncta A B, C, D &c. transibit helix. Et hic modus est helicem describeudi.

II.

Vocetur itaque rectæ quidem terminus (A) qui manet ipsâ circumductâ, principium Helicis.

III.

*Lineæ verò *situs, à quo cœpit recta (AZ) circumferri, principium revolutionis.* * *vel potiùs ipsa linea primò posita.*

IV.

Recta, (AZ) quam quidem in prima revolutione perambulârit punctum in recta latum, prima vocetur; illa verò (ZY) quam in secunda revolutione confecerit idem punctum, secundæ; & consimiliter aliæ juxta revolutionum numeros pariter denominentur. Fig. 81.

V.

Spatium verò sub helice (A P Z) in prima revolutione descriptâ, & rectâ (A Z) quæ prima est, dicatur primum; quod autem continetur ab helice (Z Q Y) per secundam revolutionem descriptâ, & rectâ secundâ (Z Y) secundum vocetur; aliáque deinceps eodem modo nominentur.

Not. Nonnunquam spatium secundum dicitur incluso primo, juxta definitionem hanc; at *subinde secundum dicitur, excluso primo; & ita de reliquis.

* *in 27 prop. h.*

VI.

Et descriptus circulus, centro quidem puncto (A) quod est principium Helicis intervallo verò rectâ (A Z) quæ prima est, primus appelletur; descriptus autem centro quidem eodem, intervallo verò (A Y) duplâ rectâ, secundus vocetur; & alii continuò post hos ad eundem modum.

VII.

Fig. 82. *Ac si à puncto (A) quod est principium Helicis ducatur aliqua recta quædam linea (A B); quæ sunt ad hujus rectæ partes easdem (F Z) versùs quas revolutio fit, antecedentia vocentur, quæ verò ad alteras (E A) consequentia.*

Prop. XII.

Pappus 20 IV. Fig 83. *Si in helicem (A B C D E Z) unâ revolutione descriptam ab helicis principio (A) incidant rectæ quotlibet (A B, A C, A D, A E) æquales inter se angulos facientes: æqualiter sese excedunt.*

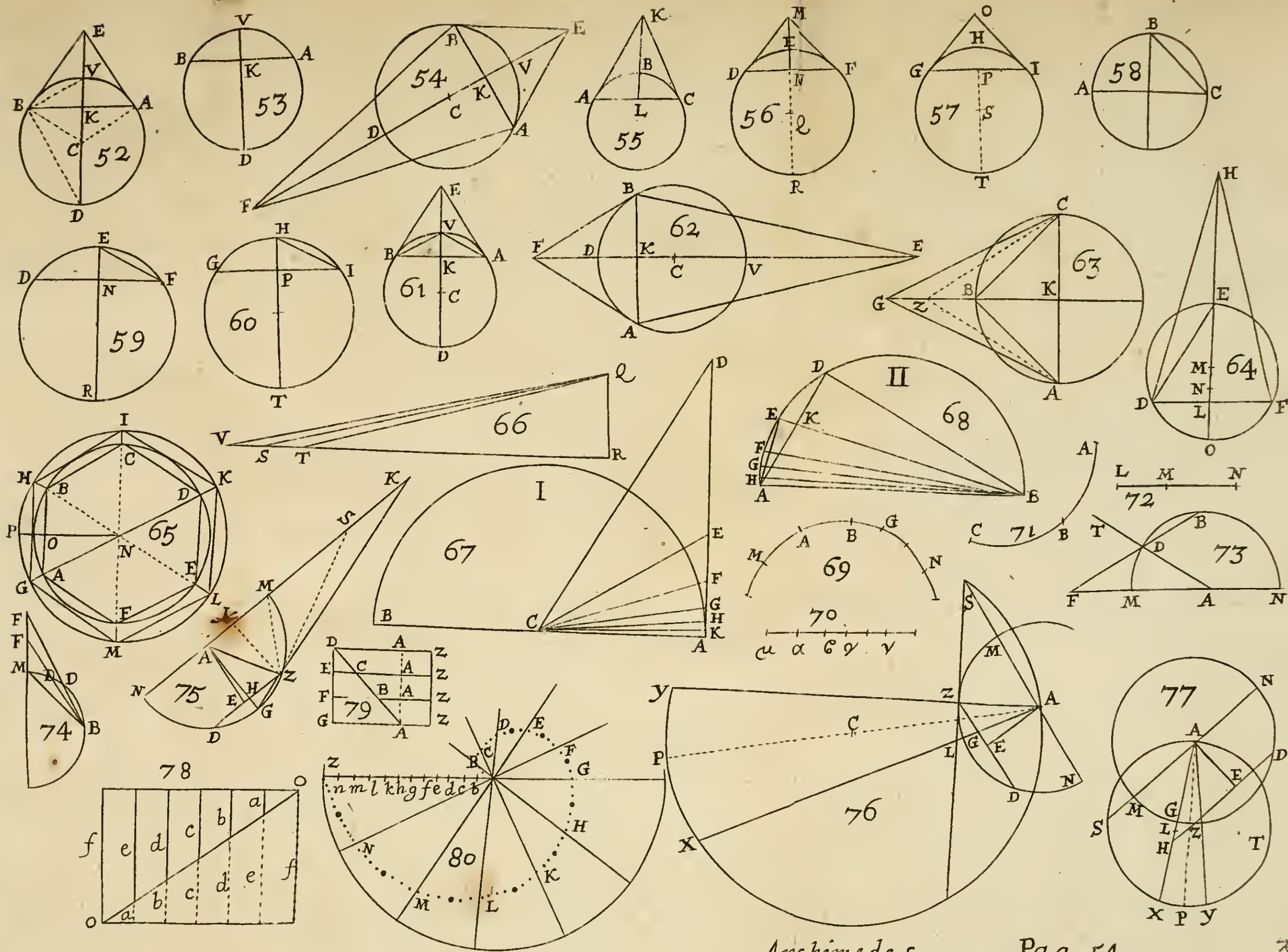
Sint excessus C R, D S, E T; & centro A per Z ducatur circulus, ad quem protrahantur A B, A C, A D, A E; & ob angulos M A N, N A O, O A P pares, [a]liquet arcus M N, N O, O P æquari. [b]ergo & tempora per M N, N O, O P æquantur, [c]hoc est tempora per R C, S D, T E. [b]ergo ipsæ R C, S D, T E æquantur. *Q E D.*

a 26. 3.
b 1 *hujus.*
c 1 *def. huj.*

Lemma.

Fig. 84. In triangulo B A C recta A G bisecet angulum B A C, erit A B + A C, ⊏ 2 A G.

Per



Archimedes. Pag. 54. 3.

Per G ducatur K L ad A G perpendicularis; & per B fiat B H ad K L parallela. Estque B K[a] = H L. ergo L C ⊏ B K. (Nam C G. G B[b] :: C L. L H.) ergo A L + L C + A L (A K) — K B ⊏ A L + A K hoc est A C + A B ⊏ A K + A L [c] ⊏ 2 A G. a 2. 6. b 3. 6. c 47. 1.

Prop. XIII.

Si recta linea (B C) *contingat helicem* (A B Z), *in uno tantùm puncto continget.*

Tangat enim, si fieri potest, duobus in punctis B, C; & connectatur B C; & angulum B A C bisecet recta A G, occurrens helici in D; tangenti in G. estque A C — A D[a] = A D — A B. quare A C + A B[b] = 2 AD. Sed A C + A B[c] ⊏ 2 A G. ergo A D ⊏ A G. ergo punctum G est intra helicem; & proinde B C non tangit spiralem, contra hypothesin. a 12 *hujus.* b 2 *ax.* 1. c *lemm. præc.*

Prop. XIV.

Si in helicem (A B C Z) *primâ revolutione descriptam incidant duæ rectæ* (A B, A C) *à puncto* (A) *quod est principium helicis, & producantur ad circumferentiam primi circuli* (Z M N O) *eandem inter se rationem habebunt in helicem incidentes* (A B, A C) *quam circuli arcus* (Z M N, Z M O) *qui sunt inter helicis terminum* (Z), *& terminos* (N, O) *à productis ad peripherias factos, sumptis in antecedentia arcubus, ab helicis termino* (Z). *Papp.* XIX. 4. Fig 86.

Est enim recta A B ad rectam A C, [a]ut tempus per A B ad tempus per A C; [b]hoc est tempus per arcum Z M N ad tempus per arcum Z M O, [a]hoc est ut arcus Z M N ad arcum Z M O. a 1 *hujus.* b 1 *def. hujus*

Coroll. Eodem discursu quæcunque partes rectarum ad se sunt, ut arcus eodem tempore peracti; & totus radius ad quamcunque partem ipsius se habet, ut tota peripheria ad arcum eodem tempore pervolutum.

Prop. XV.

Et siquidem in helicem (A Z B C Y) *ex secunda revolutione descriptam inciderint rectæ* (A B, A C) *ab helicis principio* (A); *eandem rationem habebunt rectæ* (A B, A C) *quam dictæ peripheriæ* (Z M N, Z M O) *post acceptas integras circumferentias.* Fig.. 87.

Rur-

a 1 *hujus* b 1 *def. hujus.* Rurſus enim eſt recta A B ad A C, [a]ut tempus per A B ad tempus per A C, [b]hoc eſt ut tempus per totam circumferentiam, & arcum Z M N ad tempus per totam circumferentiam, & arcum Z M O, [a]hoc eſt ut tota circumferentia cum arcu Z M N ad totam circumferentiam cum arcu Z M O.

Sch. Eodem modo, de partibus oſtendetur, ut in *Coroll.* præcedentis, quod & ad ſequentia extendetur.

Nota vero poſſe dictarum peripheriarum rationes in quovis circulo circa centrum A deſcripto computari: rectæ enim A Z, A N, A O protractæ ſimiles perpetuo peripherias abſcindent.

Coroll. Eodem oſtendetur modo quod ſi in helicem ex tertia revolutione deſcriptam inciderint rectæ, eandem inter ſe rationem habebunt, quam dicti arcus poſt totas circumferentias bis ſumptas: quin & ſimiliter quæ in alias helices incidunt, demonſtrantur eandem habere rationem, quam dicti arcus poſt integras circumferentias toties acceptas, quotus eſt numerus revolutionum unitate minutus, etiamſi altera incidens in terminum helicis cadat.

Prop. XVI.

Fig. 88. *Si helicem* (A B Z) *ex prima revolutione deſcriptam contingat recta linea* (S T); *& à contactu* (B) *connectatur ad punctum* (A) *quod eſt principium helicis; inæquales erunt anguli* (A B S, A B T) *quos facit tangens ad connexam; & quidem* (A B T), *qui in antecedentia, obtuſus eſt; qui verò* (A B S) *in conſequentia, acutus.*

Centro A per B ducatur circulus B D E G; liquet helicem extra
a 1 *def. hujus.* hunc cadere verſus partes T, [a]quia verſus illas creſcunt ad helicem du-
b 16. 3. ctæ rectæ; unde angulus A B T angulo ſemicirculari A B D, & [b]proinde quovis acuto major eſt. Sit itaque, ſi fieri poteſt, rectus; [b]quam-
c 5 *hujus.* obrem B T tanget circulum B D E; unde [c]duci poterit recta A T ſecans tangentem in T, & circulum D, ita ut intercepta D T ſit ad radium A D in minori ratione, quàm arcus B D, ad arcum E G B. Occurrat A B circulo primo Z M N in N, & A D eidem in O, ac helici
d 4 *cor.* 33.6. in H. eſtque componendo A T. A D ⊐ (arc E G B D. arc E G B [e]::
e 44 *hujus.* arc Z M N O. arc Z M N [e]:: A H. A B [f]::) A H. A D. [g]unde A T
f 7. 5. ⊐ A H; adeóque tangens intra helicem cadet, nec ideo tanget; quæ
g 10. 5. repugnant. quin potiùs angulus A B T obtuſus eſt, quique deinceps A B S acutus.

Coroll.

Coroll.

Haud absimiliter ostendetur, si & tangens helicem ad terminum (Z) contingat, idem evenire.

Prop. XVII.

Quinimò si helicem è secunda revolutione descriptam recta contingat, idem accidet.

Prorsus eâdem methodo demonstratur quâ præcedens, nisi quòd hic loco prop. 14. adhibeatur prop. 15. hujus.

Coroll.

Eadem verò evenient, etiam si tangens ad finem helicis contingat.

Item similiter ostendetur, quòd si ex quacunque revolutione descriptam helicem recta quædam linea tangat, etiamnum ad finem ejus, inæquales efficiet angulos ad conjunctam à tactu ad principium helicis; & eum quidem qui in antecedentia est, obtusum, illum verò qui in consequentia, acutum.

Prop. XVIII.

Si helicem (A Z B) *ex primâ revolutione descriptam tangat recta linea* (P Z) *ad helicis terminum* (Z); *à puncto autem* (A) *quod est in principio helicis, ducatur quædam* (A P) *revolutionis principio* (A Z) *perpendicularis, ducta* (A P) *tangenti occurret; & quæ est inter tangentem ac principium spiralis recta*(AP) *æqualis est circuli peripheriæ* ϖ. Fig. 89.

Quòd tangens occurrat perpendiculari A P, patet; * quia angulus A Z B est acutus. Porro * 16 *hujus.*

Sit recta A O major peripheria ϖ; & ducatur O Z; dico O Z secare helicem infra Z, vel ad antecedentia helicis. Nam fiat A E ad O Z perpendicularis; ducatur autem A H, secans O Z protractam in H, & circulum in G, [a]ita ut sit intercepta G H ad chordam Z G, Z A ad ϖ (id fieri potest, quia Z A. ϖ. [b]$\sqsubset$ Z A. A O, [c] vel Z E. A E). Secet autem A H helicem in B. Et quia G H. arc Z G [b]$\sqsupset$ (G H. chord Z G [d]::) Z A. ϖ. erit permutando G H. |Z A. $\sqsupset$ arc Z G. ϖ.
|A G

ergo componendo A H. A G. $\sqsupset$ (ϖ -|- arc Z G. arc Z G[e] ::) A B. A G. [f]quare A B $\sqsubset$ A H. ergo punctum H est intra helicem, & proinde O Z secat helicem.

a 6 *hujus.* b *hyp.* & 8. 5. c 4. 6. d *const.* e 15 *hujus.* f 10. 5.

Fig. 90. Sit secundò AQ minor quàm ϖ. dico quoque ductam QZ helicem secare: nam ducatur tangens ZT. & AE ad ZQ perpendicularis; & quia AZ. ϖ [g] ⊐ AZ. AQ; [h] duci possit recta AL, ita ut HG inter ZQ, & circulum posita se habeat ad ZL, partem tangentis abscissam, ut AZ ad ϖ; secet autem AL helicem in B. Et quia AZ. ϖ [k] :: HG. ZL [l] ⊐ HG. arc ZG. erit permutando AZ (AG). HG. ⊐ ϖ. arc. ZG [m] :: AG. BG. [n] ergo HG ⊏ BG. unde punctum H est intra helicem: & proinde QZ helicem secat. Quum igitur nulla QZ ad perpendicularem AP ducta peripheriæ inæqualem abscindens tangat helicem, liquet illam quæ tanget, peripheriæ æqualem abscindere. *Q.E.D.*

g hyp. & 8. 5. h 7 hujus. k constr. l 8. 5. & 2. 1 de ... m cor. 14 huj. n 10. 5.

Fig. 91. Dico porro, si AP = ϖ, ductam PZ helicem tangere. Sumatur enim in DZ quodvis punctum H, & per ipsum ducatur AH occurrens helici in B, circulo in G; & demittatur HK ad PA parallela; centro autem A per K ducatur circulus KRV, helicem secans in R; & per R ducatur radius AS. Estque PA. HK [o] :: AZ. KZ [*] :: AZ. RS [p] :: ϖ. arc ZS. ergo quum PA = ϖ, [q] erit HK = arc. ZS. verùm HK ⊐ arc ZG. ergo arc ZS ⊐ arc ZG. [r] unde AR ⊏ AB. ergo quum AH ⊏ AR vel AK, liquet punctum H extra helicem cadere. quare tota DZ extra ipsam cadit.

o 4. 6. * 7. 5. p cor. 14. huj. q hyp. r 14. 5.

In protractâ porro PZ sumatur quodvis punctum *h*, & per ipsum ducatur A*k* secans helicem in *b*, circulum in *g*. Item ab *e* demittatur *ek* ad AZ perpendicularis, & centro A per *k* ducatur circulus *krv* helicem secans in *r*; ducatúrque recta A*r*, circulo primo occurrens in *s*. estque ut priùs AP. *hk* [s] :: AZ. ZK [t] :: AZ. S*r* [u] :: ϖ. arc ZS. [x] unde *hk* = arc Z*s*. Atqui *hk* ⊏ arc Z*g*. ergo arc Z*s* ⊏ arc Z*g*. quare A*r* ⊏ A*b*. verum A*h* ⊏ A*k* = A*r*. ergo magis A*h* ⊏ A*b*. ergo punctum *h* est extra helicem. unde planè concluditur totam PZ utcunque productam extra helicem poni, ipsamque proinde contingere.

Signa ... debent ... s 4. 6. t 7. 5. u 15 huj. x 14. 5.

Ita *subtilissimum hoc Archimedis theorema*, cum ejus converso, demonstravimus ostensivè; quod maluimus facere, tum quia præstantior est hic demonstrandi modus, tum quo melius authoris ipsius methodus innotesceret. Siquidem duæ primæ partes *Archimedis* principiis insistunt; tertiam nos excogitavimus, quæ monstrat quam facilè, quamque perspicuo theorematis hujus conversum demonstrari possit, adeóque quomodo potuit inveniri.

Prop.

Prop. XIX.

At si spiralem (A Z Y) *ex secunda revolutione descriptam ad terminum contingat recta, & à principio spiralis ducatur quædam* (A O) *ad rectos revolutionis principio* (A Y), **occurret ipsa contingenti; eritque recta quæ est inter tangentem, & principium spiralis, dupla peripheriæ secundi circuli* (ϖ). Fig. 92. *per 17 huj.

Sit enim O A ⊏ 2ϖ. [a]unde A Y, Z ϖ. ⊏ A Y. O A [b]:: Y E. A E (ductâ scilicet A E ad O Y perpendiculari) [c]ergo rursus duci possit recta A H secans O Y protractam in H, & circulum in G, ita ut sit intercepta G H ad chordam G Y, ut A Y ad 2ϖ. secet igitur A H spiralem in B. Et quia G H. arc Y G [a]⊐ G H. chord Z G [d]:: A Y. 2ϖ; erit permutando G H. A Y ⊐ (arc Y G. 2ϖ [e]::) G B. A Y. [f]ergo G H ⊐ G B. & proinde punctum H est intra helicem. Unde O Y non continget helicem. Similirer, si ponatur Q A ⊐ Q ϖ, imitando præcedentis ratiocinium, demonstrabis ductam Q Y helicem non tangere: quapropter quæ tangit Y P duabus peripheriis æqualem A P abscindet. *Q. E. D.*

a 8. 5. b 4. 6. c 6 hujus. d const. e sch. 15 huj. f 10. 5.

Sed & unico argumento, sicut in præcedenti, demonstrari possit conversum hujus, nempe si A P = 2ϖ, rectam P Y tangere helicem: tu rem expende; mihi constitutum est a repetitionibus temperare.

Coroll.

Eodem modo demonstrabitur, quod si helicem in qualicunque revolutione descriptam recta quædam tangat in helicis termino, & a principio helicis educta, revolutionis principio perpendicularis, occurrat tangenti, multiplex hæc erit peripheriæ circuli, juxta revolutionum numerum denominati, eodem numero.

Prop. XX.

Si helicem (A B Z) *in prima revolutione descriptam tangat recta linea* (B P) *non ad finem helicis; à contactu verò* (B) *ad principium helicis conjungatur recta* (B A) *& centro quidem* (A) *principio helicis, intervallo autem conjunctæ* (A B) *describatur circulus* (B E F); *à principio autem helicis ducatur quædam* (A P) *à contactu ad initium helicis connexæ* (A B) *perpendicularis; occurret illa contingenti; eritq; recta* (A P) *occursui, & helicis principio interjecta, æqualis peripheriæ* Fig. 93.

(E F B) *quæ est inter contactum, & sectionem, ubi descriptus circulus secat principium revolutionis; in antecedentia acceptâ peripheriâ à puncto* (E) *quod est in principio revolutionis.*

Nihil facilius est, quàm præcedentes discursus huc applicare: nota
Coroll. 14. & num. 15. tantùm, si ducatur quæpiam A C secans helicem in C, circulum in G, fore AG . G C :: arc EFB. arc BG. Cætera sponte fluent:
A B
quid plura? —— ἐχθρὸν δέ μοι ἐστὶν
Αὖθις ἀριζήλως εἰρημένα μυθολογεύειν.

Coroll.

Quinetiam eodem pacto demonstrabitur, si in secunda circumvolutione descriptam helicem contingat recta, non ad finem helicis, alia verò eadem construantur, quòd rectæ contingenti occurrentis pars, intercepta à principio helicis, æqualis est toti descripti circuli peripheriæ, & præterea illi, quæ est inter dicta puncta, similiter sumptâ peripheriâ. Et porro si ex quacunque revolutione progenitam *helicem* contingat aliqua recta, non ad terminum helicis; alia verò eadem disponantur, quòd recta dictis punctis interjecta, sit multiplex quædam peripheriæ descripti circuli secundum numerum proximè minorem eo, secundùm quem revolutiones dicuntur., & insuper æqualis arcui inter dicta puncta similiter sumpto.

Prop. XXI.

Fig. 94. *Sumendo spatium comprehensum sub helice*(A B C D E F G L Z) *in prima revolutione descripta, & prima in principio revolutionis recta* (A Z); *possibile est ipsi figuram planam circumscribere, aliámque inscribere, è similibus compositam sectoribus, ita ut circumscripta inscriptâ major sit quocunque proposito spatio* (X).

a 29. 1. Radii quotlibet primi circuli circumferentiam [a] æqualiter partiant (ordiendo ab Z) occurrentes helici punctis A, B, C, D, E, F, G, L, Z. tum centro A per hæc puncta ducantur arcus *b* B *β*, *c* C *κ*, *d* D *δ*, *e* E *ε*, *f* F *φ*, *g* G *γ*, *l* L *λ*, *z* Z: itaque vides circumscriptam helici figuram A *b* B *c* C *d* D *e* E *f* F *g* G *l* L *z* Z conflatam è sectoribus similibus *b* A *b*, *c* A C, *d* A D, *&c.* Vides etiam alteram A B *β* C *κ* D *δ* E *ε* F *φ* G *γ* L *λ* inscriptam, constantémque sectoribus B A *β*, C A *κ*, D A *δ* *&c.* qui totidem sunt, & æquales sectoribus figuræ circum-
b 33. 6. scriptæ, excepto maximo *z* A Z. ([b] nam sector *β* A B = *b* A B; &
κ A C

$\varkappa$ A C = c A C, &c). Itaque si circulus [a]bisectione (vel aliâ æquali sectione) continuò divisus fuerit, ita ut sector z A Z tandem evadat minor dato spatio X [c](id quod fieri potest), liquet hoc modo fieri posse quod proponitur. c 1. 10.

Coroll.

Hinc patet, quòd possibile sit circa dictum spatium figuram, qualis dicta est, describere, ita ut circumscripta figura spatium superet excessu minori quocunque proposito spatio: & rursus, aliam inscribere, ita ut similiter spatium superet figuram minori quocunque proposito spatio.

Sch. Nota radios A B, A C, A D, A E, *&c.* sese æqualiter excedere; & excessus æquari minimo A B. 12 *hujus.*

Prop. XXII.

Sumendo spatium comprehensum sub helice (Z M N O P R Y) *per secundam revolutionem descriptâ, & recta* (Z Y) *quæ est secunda in principio revolutionis, potest ipsi figura plana circumscribi, similibus è sectoribus composita, necnon alia inscribi, sic ut circumscripta inscriptam excedat minori quàm proposito quovis spatio* (X). Fig. 95.

Radii quotlibet secundum circulum [a]æqualiter dispertiant, occurrentes helici punctis Z, M, N, O, P, R, Y; per quæ, centro A, describantur arcus $Z\zeta$, m M μ, n N ν, o O ω, p P ϖ, r R, y Y; unde helici circumscriptam habemus figuram A m M n N o O p P r R y Y constantem similibus sectoribus m A M, n A N, o A O, *&c.* & inscriptam aliam A $Z\zeta$ M μ N ν O ω P ϖ R ρ constantem totidem sectoribus Z A ζ, M A μ, N A ν, *&c.* Et cùm sit sector m A M [b]= M A μ; & n A N [b]= N A ν, & ita continuò, liquet excessum figurarum esse penes sectores Z A ζ primum inscriptæ, & y A Y, ultimum circumscriptæ (nam reliqui hujus reliquis illius æquantur). atqui continuâ bisectione [c]fieri potest, ut sit sector y A Y ⊐ X; túmque fortiùs erit sect. y A Y − Z A ζ ⊐ X. quare constat propositum. a 9. 1. b 33. 6. c 1. 10.

Schol. Rursus nota radios A Z, A M, A N, *&c.* æquali excessu procedere, & maximum A Y duplum esse minimi A Z. 12 *hujus.*

Coroll.

Coroll. I.

Itaque liquet exceſſum circumſcriptæ figuræ ſupra ſumptum ſpatium (ſub helice comprehenſum) minorem eſſe poſſe quovis propoſito ſpatio. Itidemque dicti ſpatii ſupra inſcriptam figuram exceſſum minorem eſſe poſſe quolibet propoſito ſpatio.

II.

Simili modo liquet, quòd poſſibile eſt circa ſpatium ſub helice in quacunque revolutione deſcripta, & recta in principio revolutionis, ab eodem numero denominata comprehenſum deſcribere figuram, qualem diximus planam, ita ut circumſcripta figura ſuperet ſumptum ſpatium minori omni propoſito ſpatio; & rurſus inſcribere, ita ut ſumptum ſpatium majus ſit, quam inſcripta figura, minori quovis propoſito ſpatio.

Prop. XXIII.

Fig. 96. *Sumpto ſpatio* (C A G) *comprehenſo ſub helice, quæ minor eſt deſcriptâ in prima revolutione, non habenti pro termino principium helicis, & ſub rectis* (A C, A G) *ductis à principio helicis; poſſibile eſt ſpatio figuram circumſcribere, ſimilibus e ſectoribus compoſitam & aliam inſcribere ita ut circumſcripta figura ſuperet inſcriptam minori quàm quocunque propoſito ſpatio* (X).

Rectæ A D, A E, A F æqualiter ſecent angulum C A G, vel arcum K G, ita ut ſector *g* A G ⊐ X; & centro A per C, D, E, F ducantur arcus C κ, *d* D δ, *e* E ε, *f* F φ, & (ſicut in præcedentibus) planiſſimè liquet propoſitum.

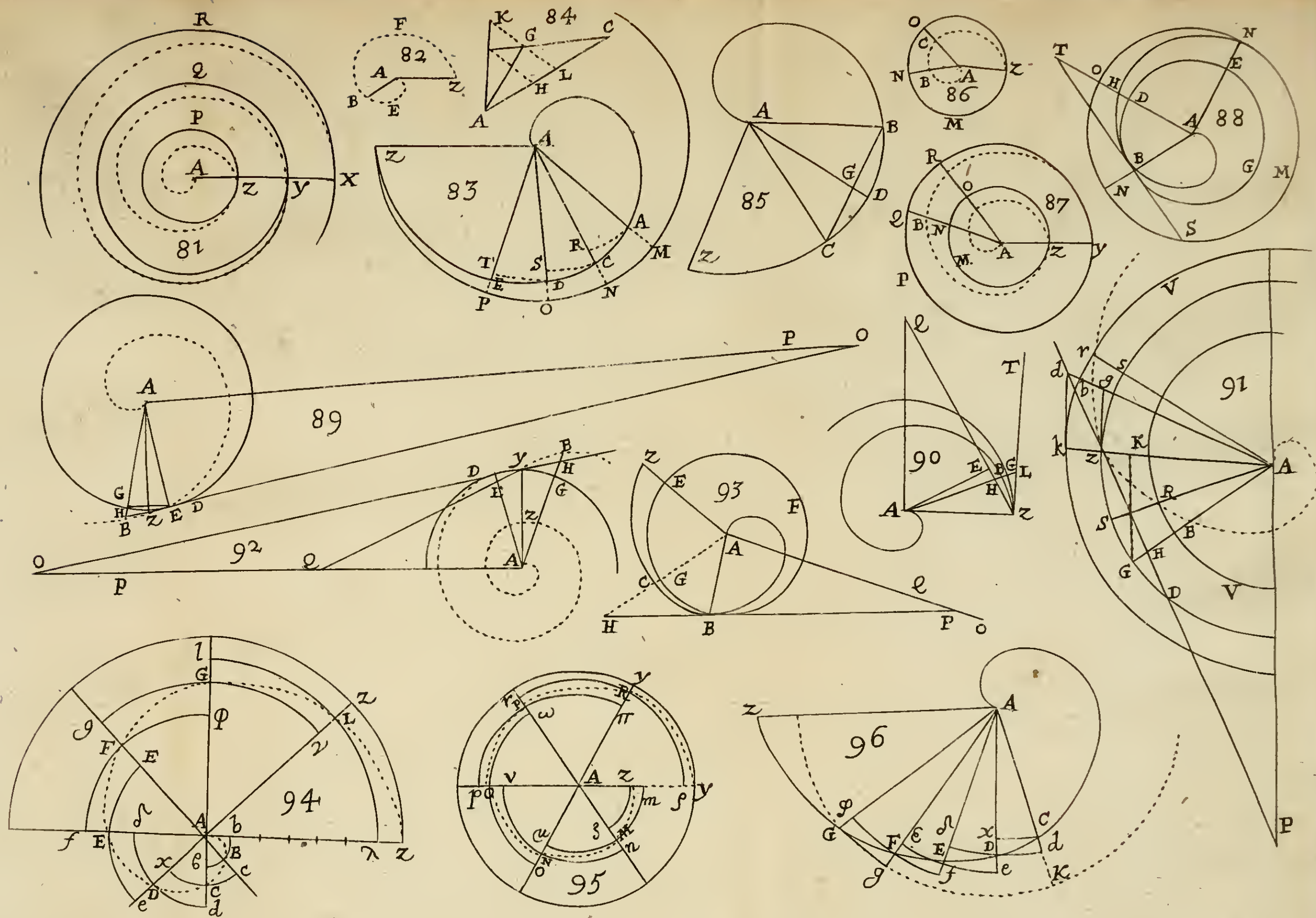
Coroll.

Hinc manifeſtum eſt, quòd circa dictum ſpatium figuram planam deſcribere licet, qualem diximus, ut circumſcripta figura major ſit ſpatio, minori quam propoſito quovis ſpatio.

Prop. XXIV.

Fig. 97. [illegible] 21, IV. *Spatium ſub helice* (A B C D Z) *in prima revolutione deſcripta, & prima recta* (A Z) *quæ eſt in principio revolutionis, tertia pars eſt primi circuli. Spatium dicatur* (S), *& primus circulus* ⊙ α.

Dico


81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96

Dico primò, non est $\frac{1}{3}\odot\alpha \sqsubset S$. Nam si affirmas helici [a]circumscribatur figura A b B c C d D Z, juxta præscriptum 21æ hujus, quæ dicatur φ, ita ut sit $\varphi - S \sqsupset \frac{1}{3}\odot\alpha - S$: [b]vel $\varphi \sqsupset \frac{1}{3}\odot\alpha$. Cùm verò radii A B, A C, A D *&c.* [c]sese æqualiter excedant, & excessus æquetur minimo A B, & sectores (ad ipsos) similes sint, [d] erunt tot sectores æquales maximo z A Z, quot sunt omnes inæquales, minores triplo inæqualium, hoc est circulus α minor triplo figuræ φ; vel $\frac{1}{3}\odot\alpha \sqsupset \varphi$. at priùs affirmâsti esse $\frac{1}{3}\alpha \sqsubset \varphi$. ergo tibi contradicis. — a *cor.* 21 *huj.* — b 4 *ax.* 1. — c *schol.* 21 *h.* — d 3 *cor.* 10 *h.* — e 4 & 5 *ax.* 1.

Dico secundò, non esse $\frac{1}{3}\odot\alpha \sqsupset S$; si hoc affirmas, helici [a]inscribatur figura A B β C κ Z, quæ vocetur ψ, etiam juxta 21 hujus, ita ut $S - \psi \sqsupset S - \frac{1}{3}\odot\alpha$; [e] vel $\frac{1}{3}\alpha \sqsupset \psi$. atqui sectores omnes æquales sectori z A Z [d] majores sunt triplo totidem inæqualium sine z A Z, hoc est $\odot\alpha \sqsubset 3\psi$, vel $\frac{1\odot\alpha}{3} \sqsubset \psi$. at priùs erat $\frac{1}{3}\alpha \sqsupset \psi$, quæ repugnant. — *Hoc etiam bellè declarat Pappus in* 21. *IV.*

Restat igitur, ut sit $\frac{1}{3}\odot\alpha = S$. *Q. E. D.*

Schol.

Hoc directè perspicitur è scholio ad 10 hujus. Cùm enim sectores figuræ circumscriptæ vel inscriptæ procedant ut 0, 1, 4, 9, 16 *&c.* (in duplicata scilicet radiorum proportione) & quò desinant in spatium helicis, eorum numerus sit infinitus, ideo totidem eorum maximo æquales, hoc est totus circulus, eorum omnium triplus est, hoc est ipsius spatii, ab helice comprehensi, triplus.

Eleganter hoc etiam colligitur methodo indivisibilium. Dividatur enim radius A Z in partes quotlibet æquales punctis b, c, d, e, f, g, h; & centro A per ista puncta describantur arcus b B, c C, d D, &c. occurrentes helici punctis B, C, D, E, F, G, H. Estque arcus c C quadruplus arcûs b B (ob radium c A duplum radii b A, & angulum cAC duplum anguli b A B), & arcus d D noncuplus arcûs b B; & sic perpetuò juxta seriem 0, 1, 4, 9, 16 &c. usque ad maximum zz. quare si numerus horum arcuum infinitus sit (vel si per omnia radii A Z puncta transeant) erit eorum summa subtripla totidem æqualium maximo; hoc est radii ducti in circumferentiam circuli Z Z, hoc est dupli circuli ZZ. ergo spatium ex iis constans est $\frac{2}{3}$ circuli ZZ, & reliquum intra helicem est $\frac{1}{3}$ ejusdem. Exhinc patet magna spiralem inter & parabolen affinitas; nam si A X sit axis *parabolæ* A B C D E F G H Z, cujus vertex A, tangens A Z, & per puncta divisionum b, c, d, &c. ducantur ad axem parallelæ A B, c C, d D &c. Erit c C $= 4$ bB — Fig. 97. — Fig. 98.

b B, & *d* D = 9 *b* B &c. *d* D = 16 *b* B; eâdemque sic perpetuò ratione sicut in spirali; adeò quidem ut si recta *b* B hîc æquetur arcui *b* B istic; sint omnes rectæ *c* C, *d* D &c. arcubus respectivis *c* C, *d* D &c æquales. unde spiralis nihil est aliud quàm parabole, cujus parallelæ axi rectæ in circulares arcus, circa verticem A veluti centrum, contorquentur. Unde non adeò mirum est innumeras spiralis affectiones cum passionibus parabolæ conspirare. Mihi sufficiet hoc obiter subnotâsse; qui plura volet, adeat *Gregorium Vincentium*, *Cavallerium*, *Torricellium*, aliosque.

Coroll.

Fig. 99. Simili planè discursu, si à centro A ducatur in primæ revolutionis helicem recta quævis A G; & centro A per G describatur circulus E F G, occurrens revolutionis principio A Z in E; erit spatium conclusum helice A B G, & rectâ A G subtriplum sectoris A E F G A.

Prop. XXV.

fig. 95. *Spatium* (Σ) *sub spirali* (Z M N O P R Y) *& recta* (Z Y) *secunda in principio revolutionis ad secundum circulum* (𝔊) *hanc habet rationem, quam habet 7 ad 12;* * *quæ eadem est, quam habent utraque simul,*
* *schol. 11 h.* *quodque comprehenditur sub radio secundi circuli* (A Y), *& radio primi circuli* (A Z), *& tertia pars quadrati, quod ab excessu* (Z Y) *quo radius secundi circuli excedit radium primi circuli, ad quadratum à radio secundi circuli.*

Si fieri potest, sit primò ⊙ rad $\surd$ AY × AZ + $\frac{1}{3}$ ZYq $\sqsubset$ Σ.

a *cor. 22 huj.* [a]Circumscribatur igitur spatio figura (quam voca φ) constans sectoribus, qualis in 22 hujus, ita ut φ — Σ $\sqsupset$ ⊙ rad $\surd$: AY × AZ + $\frac{1}{3}$ ZYq — Σ. [b]vel φ $\sqsupset$ ⊙ rad $\surd$ AY × AZ + $\frac{1}{3}$ ZYq. Cùm verò re-

b *4. ax. 1.* ctæ AZ, AM, AN, AO &c. [c] sese æqualiter excedant, & super iis

c *sch. 22 huj.* (exceptâ minimâ AZ) constituti similes sectores componant figuram φ, & totidem æquales maximo *y* AY conficiant circulum 𝔊; [d]erit ⊙ 𝔊.

d *cor. 11. huj.* φ $\sqsupset$ AYq. AY × AZ + $\frac{1}{3}$ ZYq [e] :: ⊙ 𝔊. ⊙ rad $\surd$: AY × AZ + $\frac{1}{3}$

e *cor. 2. 12.* ZYq. [f] quare φ $\sqsubset$ ⊙ rad $\surd$: AY × AZ + $\frac{1}{3}$ ZYq. Erat verò φ $\sqsupset$

f *10. 5.* ⊙ rad $\surd$ AY × AZ + $\frac{1}{3}$ ZYq, quæ repugnant.

Sin dicatur ⊙ rad $\surd$: AY × AZ + $\frac{1}{3}$ ZYq $\sqsupset$ Σ. Inscribatur figura ψ, [a]ita ut sit Σ — ψ $\sqsupset$ Σ — ⊙ $\surd$: AY × AZ + $\frac{1}{3}$ ZYq. [e] quare ⊙

e *4 & 5, ax. 1.* rad $\surd$: AY × AZ + $\frac{1}{3}$ ZYq $\sqsupset$ ψ. atqui hîc sectores similes ad AZ, AM, AN &c. sine mazimo *y* AY constituunt figuram ψ, & totidem maximo pares circulum 𝔊. ergo ⊙ 𝔊. ψ $\sqsubset$ ⊙ 𝔊. ⊙ rad $\surd$: AY

× AZ

$\times AZ + \frac{1}{3} ZYq$. & proinde $\sqsupset$ ⊙ rad $\surd$: $AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq$. quod itidem prædictis repugnat.

Quin igitur potiùs est ⊙ rad $\surd$: $AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq = \Sigma$. unde $\Sigma . \odot \beta :: {}^{c} AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq . ZYq$ * :: 7.12. *Q.E.D.* *sch. 11 huj.

Coroll.

Eodem autem modo demonstrabitur, quòd comprehensum spatium sub helice per quamcunque revolutionem descripta, & rectâ eodem numero, quo revolutio, denominatâ, ad circulum itidem eodem numero denotatum, quo revolutiones; rationem habet, quam utraq; simul, quódque sub radio circuli ejusdem numeri, & radio circuli numero, qui unitate minor sit numero revolutionum, denominat; & tertia pars quadrati quod ab excessu, quo excedit radius majoris circuli dictorum radium minoris è dictis circuli ad quadratum radii majoris circuli dictorum. Nempe spatium $\alpha\beta\gamma$ se habebit ad circulum tertium, ut $AX \times AY + \frac{1}{3} YXq$ ad AXq; & spatium $\alpha\beta\gamma\delta$ se habebit ad circulum quartum, ut $AV \times AX + \frac{1}{3} XVq$ ad AVq.

Coroll.

Hinc ipsa spatia inter se erunt ut $\frac{AZq}{3}$, $AY \times AZ + \frac{ZYq}{3}$, $AX \times AY + \frac{YXq}{3}$, $AV \times AX + \frac{XVq}{3}$ &c. Nam sp. $\alpha = \frac{AZq}{3} \times \frac{\odot\alpha}{AZq}$. & sp. $\beta = \left(AY \times AZ. + \frac{ZYq}{3}\right) \times \frac{\odot\beta}{AYq}$. & sp. $\gamma = \left(AX \times AY + \frac{YXq}{3}\right) \times \frac{\odot\gamma}{AXq}$.

at $\frac{\odot\alpha}{AZq} = \frac{\odot\beta}{AYq} = \frac{\odot\gamma}{AXq}$ &c.

Hinc confici possit Tabella rationes exprimens quas habent spatia *helicibus*, & *rectis* comprehensa ad circulos ejusdem ordinis, & ad se invicem, quæ talis est. (quòd si horum spatiorum primum subtrahatur è secundo, secundum è tertio, & ita deinceps, reliqua se habebunt juxta columnam ultimam; quæ nempe spatia respicit propositio 27ª subsequens).

	Circuli.	*Spatia.*	*Residua.*
1.	3	1	1 α.
2.	12	7	6 ϛ.
3.	27	19	12. γ
4.	48	37	18. δ
5.	85	61	24
6.	108	91	30
7.	147	127	36
8.	192	169	42
9.	243	217	48
10.	300	271	54

Prop. XXVI.

Fig. 96. *Comprehensum spatium* (C A G) *sub helice* (C G) *quæ minor est descriptâ in una revolutione, non habens terminum principium helicis* (A), *& rectis* (A C, A G) *à terminis ejus ad principium helicis ductis, ad sectorem* (K A G) *radium quidem habentem æqualem majori* (A G) *ductarum à termino ad principium helicis, arcum verò* (G K) *ductis rectis interceptum, ad easdem partes cum helice; hanc habent rationem quam habent utraque simul, quodque continetur sub rectis* (A G, A C) *à terminis ad principium spiralis ductis, & tertia pars quadrati ab excessu quo major dictarum superet minorem ad quadratum majoris* (A G) *à terminis ad principium helicis conjunctarum.*

Sector ipsi K A G similis & cujus radius sit $\sqrt{}$: A G × A C + $\frac{1}{3}$
a *cor.* 23 *h.* C Kq vocetur ξ: &, si fieri potest, sit ξ major spatio C A G. [a] Circumscribatur figura qualis in 23 hujus, (quæ nominetur φ) ita ut sit
b 4. *ax.* 1. φ — sp. C A G ⊐ ξ — sp C A G. [b]vel φ ⊐ ξ. Cùm verò sint rectæ A C, A D, A E &c. æquali progredientes excessu, à quibus prætterquam à minima A C, descripti similes sectores componunt figuram φ, totidémque æquales maximo faciunt sectorem K A G, [c]erit sect KAG.
c *cor.* 11 *huj.* φ ⊐ A Gq. A G × A C + $\frac{1}{3}$ C Kq :: sect K A G. ξ. unde φ ⊏ ξ.
A K.
contra constructionem.

Sin

Sin dicatur spatium C A G majus dicto sectore ξ,[a] inscribatur figura quædam ψ, ita ut sp C A G — ψ ⊐ sp. C A G — ξ; adeóque ξ ⊐ ψ. atqui jam sect K AG. ψ ⊏ sect K A G. ξ. unde contra constructionem, ψ ⊐ ξ. Ut hæc igitur vitentur absurda, erit ξ = sp C A G; & idcirco sp C A G. sect K A G :: sect ξ. sect K A G :: A G × A C + $\frac{1}{3}$ C Kq. A Gq. *Q. E. D.*

Coroll.

Spatium K C G. C A G :: A C × C K + $\frac{2}{3}$ C Kq. A G × A C + $\frac{1}{3}$ C Kq.

Nam A Kq[a] = A Cq + 2 A C × C K + C Kq. Pro A Cq + A C × C K [b]substituatur æquale A C × A K; estque A Kq = A C × A K + A C × C K + C Kq ergò sect K A G. sp C A G[c] :: A C × A K + A C × C K + C Kq. A G × A C + $\frac{1}{3}$ C Kq. & dividendo A G sp K C G. sp C A G :: AC × C K — $\frac{2}{3}$ C Kq. A G × A C + $\frac{1}{3}$ CKq,

a 4. 2.
b 3. 2.
c 27 *hujus &*

Prop. XXVII.

Spatiorum comprehensorum sub helicibus & rectis, quæ in revolutione, tertium quidem (γ) secundi (ϐ) duplum est, quartum verò (δ) triplum, quintum autem quadruplum; & perpetuò subsequens secundum numeros qui deinceps, multiplex est secundi spatii; primum verò spatium (α) sexta pars est secundi (ϐ).

Vid. not. ad 5 def. hujus. fig. ad coroll. 25.

Clarissimè patet horum veritas è tertia columna tabellæ suprapositæ, è 25[a] deducta. quid plura?

Prop. XXXVIII.

Si in helice (A C G Z) *ex una quacunque revolutione descripta sumantur duo puncta* (C, G) *quæ non sunt ipsius termini, à sumptis verò punctis connectantur rectæ* (A C, A G) *ad helicis principium* (A); *& centro quidem principio helicis, intervallis verò* (A C, A G) *ductis à punctis ad principium helicis describantur circuli* (C L N, K G M) *spatium* (K G C) *comprehensum sub majori arcu* (K G) *intercepto rectis* (A C, A G) *& helice rectis iisdem interjectâ, & rectâ* (C K) *productâ, hanc habebit rationem ad spatium* (L C G) *comprehensum sub minori arcu* (L C), *& eadem helice & rectâ* (G L) *connectente terminos ipsorum, quem radius* (A C) *minoris circuli cum duabus tertiis excessûs* (C K) *quo radius majoris circuli excedit minoris circuli radium*

Fig. 101.

ad radium minoris circuli cum una tertia parte ejusdem excessus (CK).

a cor. 27 h. b 26 hujus. c sch. 2. 12 d sch. 19. 5. * 3, 2. & 3 ax. 1. f 1. 6.

Nam sp. K G C. sp. C A G [a]:: A C × C K + $\frac{2}{3}$CKq. A K × AC + $\frac{1}{3}$ CKq. & sp C A G. sect K A G[b]:: A G × A C + $\frac{1}{3}$ C Kq AGq; ac sect. K A G. sect. C A L [c]:: A Gq. A Cq. ergo ex æquo sp KGC. sect C A L :: A C × C K + $\frac{2}{3}$ C Kq. A Cq. [d] ergo sp K G C. sp C A G—sect. C A L :: A C × C K — $\frac{2}{3}$C Kq. $\frac{\text{A K} \times \text{A C} + \frac{1}{3}\text{CKq}}{\text{A}}$ —A Cq: hoc est sp K G C. sp L C G :: A C × C K + $\frac{2}{3}$ C Kq. *AC × C K + $\frac{1}{3}$ C Kq [f] :: A C + $\frac{2}{3}$ C Kq. A C + $\frac{1}{3}$ C Kq. *Q.E.D.*

Theorema.

Pappus 22. IV. Fig.. 102. a cor. 24 hujus. & 15. 5. b 20. def. 5. c sch. 2. 12.

Si ab helicis A B Z *principio ducantur utcunque rectæ* A D, A C, *erunt spatia* A B D A, A B C A *inter se, ut cubi è rectis* A D, A C.

Centro A per D, C ducantur circuli F N D, E M C secantes A Z in E, F; estque spatium A B D A A B C A [a] :: sect. A F N D A. A E M C A [b] = A F N D A A E M K A + A E M K A. AEMCA =[c] A Dq. A Kq + [c] A D. A K = A D cub. | A K cub. | A C cub.

Pappus 35. IV. *Per helicem cùm alia difficilia Geometriæ Problemata, tum hoc præcipuum conficitur.*

Problema.

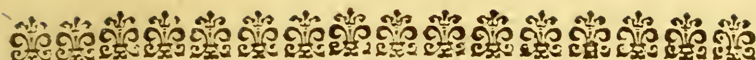
Fig 103.

Datum (angulum, vel) arcum Z M G *secare in datam rationem.*

a cor. 14. huj. b 7. 5, c constr.

Ducantur à centro A rectæ A Z, A C, & A G secet helicem ABZ in C; & ratio A E ad A C æquetur datæ, & centro A per E ducatur arcus circuli E B secans helicem in B; & ab A per B ducatur recta A B F; & liquet esse arc Z M F. arc F G [a] :: (A B. E C [b]::) A E. E C, [c] hoc est in data proportione.

DE



De Conoidibus & Sphæroidibus.

Archimedes Dositheo, S.

MItto ad te conſcriptas à me hoc in libello cùm reliquorum Theorematum Demonſtrationes, quas inter priùs miſſas non habebas, tum aliorum poſtea repertorum, quæ quidem ſæpe jam antea aggreſſus contemplari, cùm diſſicultatis aliquid habere videretur ipſorum inventio, ferè deſperavi; quamobrem neque cum aliis edita ſunt, quæ proponebantur: poſtea verò diligentiùs iis incumbens, inveni de quibus hæſitaveram. Erant autem è prioribus Theorematis reliqua circa *Conoides rectangulum* propoſita, hæc verò jam tandem inventa verſantur circa *Conoides hyperbolicum*, & *figuras Sphæroides*, quarum aliquas quidem oblongas, alias verò oblatas voco.

Definitiones, & *Hypotheſes*.

DE *Conoide utique rectangulo ſupponebantur hæc.*

(Nota: è planis conum diverſimodè ſecantibus ortas in coni ſuperficie lineas, quas *Apollonium Pergæum* ſequuti *Parabolam*, *Hyperbolam*, & *Ellipſim* jam appellitant, vetuſtiores Geometræ nominârant ſectiones *coni rectanguli*, *obtuſanguli*, *acutanguli*; quia ſcilicet, opinor, ſectiones haſce tantùm in cono recto, ſecto a plano ad crus trianguli per axem recto conſiderârunt; quomodo ſemper in cono rectangulo procreabitur *parabola*, in obtuſangulo *hyperbola*, in acutangulo *Ellipſis*, ut nempe ſi B V A ſit triangulum per axem coni, ſitq; D E communis ſectio plani ſecantis cum triangulo B V A, & V D plano Fig. 104. 105. 106.

plano secanti recta sit, ac ideo angulus V D E rectus; constat si angulus V rectus sit, esse D E ad V A parallelam, adeoque sectionem esse *parabolam*; sin angulus V sit obtusus, liquet E D cum A V producta convenire supra verticem coni, adeóque sectionem esse *hyperbolam*; quòd si angulus V fuerit acutus, patet D E occursuram ipsi V A intra verticem, ac idcirco sectionem fore *ellipsim.* Talis mihi videtur primitùs impositorum istorum nominum, * quæ passim usurpat *Archimedes* ratio: nos vero tam brevitati quàm perspicuitati consulentes ubique pro desuetis istis & jam minus appositis vocabulis usitatiora substituemus & commodiora nomina *parabolæ, hyperbolæ, ellipsis,* quod certè monitum oportere videbatur.)

* *Quamvis hæc penitus ignotas Archimedi fuisse sectiones hasce etiam in cono scaleno satis patet ex 8 & 9 hujus libri, ubi & ellipsis nomen expressum habetur.*

I. Si *parabola* manente diametro circumducta restituatur denuò unde processerat; â parabola interceptam figuram appellari *conoides parabolicum*; & *axem* quidem illius vocari *manentem diametrum*: *Verticem* verò punctum, quo axis occurrit superficiei conoidis.

Exempli gratiâ, *conoidis* B V A producti è revolutione semi-parabolæ B V K circa diametrum V K, axis est V K, vertex V.

Fig. 107. II. Si *conoides parabolicum* contingat planum, tangenti autem plano ductum parallelum aliud planum conoidis aliquam portionem abscindat; interceptam à sectione conoidis in abscindente plano planum appellari *basin abscissæ portionis*: *verticem* verò punctum, ad quod alterum planum *conoides* tangit: *Axem* verò ex ducta per verticem ad conoidis axem parallela interceptam in portione rectam.

Parabolicum conoides B V A tangat planum D T in D; & huic parallelum planum G S secet; sitque recta D E *conoidis axi* V K parallela; sit portio S D G, cujus *basis* S H G, *vertex* D, *axis* D E.

III. *De *conoide verò hyperbolico* præstruebamus hæc: si in plano sit *hyperbola*, ejúsque diameter, & sectionis **asymptoti*, diametro autem manente circumductum planum in quo sunt dictæ lineæ restituatur unde processerat; de *hyperbolæ asymptotis* perspicuum est, quòd conum *Isoscelem* intercipient, cujus vertex erit punctum, in quo *asymptoti* conveniunt, *axis* verò *diameter manens*: ab *hyperbola* verò interceptam figuram vocari *conoides hyperbolicum*; *Axem* verò diametrum qui manet; *Verticem* autem punctum, in quo axis occurrit superficiei conoidis: Conum verò ab *hyperbolæ asymptotis* interceptum, conoidis continentem dici: rectam verò conoidis, & coni ipsum continentis verticibus interjectum axi accedentem nominari.

* *Contemplanda verò proponebantur hæc; quòd &c. subjicit prop.*

* *τὰς ἔγγιστα vocat author, nos usitatum jam nomen subrogamus.*

Fig. 108.

Si *e. g. hyperbola* B V A cum *asymptotis suis* C M, C N circa diametrum C V K revolvatur, fiet *conoides hyperbolicum* B V A, ipsumq;

com-

complectens *conus* M C N, cujus *vertex* C, *axis* C K; ipſius autem *conoidis axis* eſt V K, *vertex* V, axi accedens V C.

IV. Et ſi *conoides hyperbolicum* tangat planum, tangenti autem plano parallelum aliud planum portionem abſcindat conoidis; planum quidem à ſectione conoidis in abſcindenti plano interceptum appellari *baſin* portionis abſciſſæ; *verticem* verò punctum quo planum tangens contingit conoides: Axem verò ex ducta per verticem portionis, & verticem coni conoides continentis interceptam in portione rectam, & dictis verticibus interjectam axi accedentem nuncupari. Fig. 104.

E. G. Conoides hyperbolicum B V A tangat planum T D in D, & huic parallelum S G ſecet, & per hyperbolæ centrum C ducatur recta C D E; erit facta portio S D G, cujus baſis S H G, vertex D, axis D E, axi accedens D C.

V. *Parabolica* utiq; *conoideâ* omnia*ſimilia ſunt. *Hyperbolicorum* verò *conoideon* iſta vocentur ſimilia, quorum continentes coni ſunt ſimiles.

* *Utique ſimilitudinem lato ſenſu capit, aliàs omnia parabolica conoidea non magis ſibi ſimiles ſunt quàm omnes coni.*

Hinc colligitur *hyperbolarum ſimilium* definitio ex *Archimedis* ſententia; nempe, Hyperbolæ ſimiles ſunt, quarum figuræ ſimiles, vel quarum latera ſunt proportionalia * Fig. 110. 111.

Sed intellige figuras ad axes ſolos, non ad alias diametros (ſaltem ad ſimiles diametros, hoc eſt eas quæ æquales cum ordinatim applicatis angulos faciunt) conſtitui.

* *vel, quarum diametri conjugatæ ſunt proportionales.*

Sint enim hyperbolæ B V A, *b v a*; quarum aſymptoti C M, C N, & *cm*, *cn*; axes C K, *ck*, quibus perpendiculares M N, *m n*; & his parallelæ R S, *r s* per vertices V, *v* ductæ, adeóque tangentes. Sit verò C K, M N :: *ck*, *mn*. ergo coni conoidea hyperbolica, ex hyperbolarum B V A, *b v a* circa axes C K, *ck* revolutione progenita, continentes ſunt ſimiles. Sint autem hyperbolæ B V A latera T. R. & hperbolæ *b v a* latera *t*, *r*. & quia T. R :: C Vq. V Rq :: C Kq. K Mq :: Q.*ck* Q.*km* :: Q.*cv*. Q.*vr* :: *t*.*r*. liquet eſſe T. R. :: *t*.*r*. ergo ſimilium hyperbolicorum conoideon hyperbolis convenit habere latera proportionalia. Hæ verò ex *Archimedis* ſententia ſimiles cenſentur.

De *ſphæroidibus* verò *figuris* hæc ſuppoſuimus.

VI. Si *ellipſis* manente majori diametro circumducta reſtituatur eò unde proceſſerat, deſcriptam ab ellipſe figuram appellari *ſphæroides oblongum*. Quòd ſi manente minori diametro circumducta ellipſis reſtituatur unde proceſſit, deſcriptam ab ellipſe figuram vocari *Proponitur autem contemplandum quod &c. ſubjicit Prop.*

ſphæ-

ſphæroides prolatum: utriuſque verò ſphæroidis *axem* appellari manentem diametrum: *verticem* verò punctum, quo axis occurrit ſuperficiei ſphæroidis: *centrum* verò dici punctum axis medium; & diametrum, ductam per centrum axi perpendicularem.

Sit *e.g. ellipſis* V B X A, cujus major diameter V X minorem B A ſecet pependiculariter in C; ſi circa V X revolvatur *ellipſis*, fiet *ſphæroides oblongum*, cujus *axis* V X, *vertices* V, X; *diameter* B A; ſin vero circa B A rotetur, procreabitur *ſphæroides prolatum*, cujus *axis* B A, *vertices* B, A, *diameter* V X, *centrum* verò utriuſque eſt punctum C.

Fig. 113. VII. Et ſi utrumvis *ſphæroides* contingant parallela plana, non ſecantia; tangentibus autem planis parallelum ducatur aliud planum, ſecans ſphæroides; productarum quidem portionum *baſin* appellari quod à ſphæroidis in plano ſecanti ſectione intercipitur: *vertices* autem puncta, ad quæ parallela plana *ſphæroides* contingunt: *Axes* vero, quæ è recta vertices connectente in portionibus intercipiuntur, rectas.

Sphæroides videlicet Q S D G tangant parallela plana D T, Q Y, & his parallelum planum S H G ſecet; cui occurrat tactus connectens D Q in E; erit ſectio S H G baſis; & D, Q vertices; & DE, QE axes portionum S D G, S Q G.

VIII. Similes verò dici *ſphæroides figuras*, quarum axes diametris proportionales ſunt.

Hinc ex *Archimedis* ſententia *ſimiles ellipſes* definiuntur, quarum axes conjugati ſunt proportionales; vel quarum ad axes figuræ ſimiles, vel quarum latera proportionalia.

IX. Similes verò dici *ſphæroideon*, & *conoideon* figurarum portiones, ſiquidem à ſimilibus figuris ablatæ ſunt, & baſes ſimiles habent, & axes ipſorum vel baſium planis recti exiſtentes, vel cum homologis baſium diametris æquales facientes angulos, eandem inter ſe rationem habent, quam homologi baſium diametri.

Sint nempe portiones B V A, *bva* à ſimilibus conoidibus vel ſphæ-
Fig. 114. roidibus diremptæ, quarum axes V K, *vk* cum baſium diametris B A,
115. *ba*; & H F, *hf* æquales faciant angulos; & ſit V K. *vk* :: B A. *ba* :: H F. *hf*; juxta definitionem hanc ſimiles erunt hæ portiones.

Proponitur & de ſphæroideis hæc ſpeculari, quòd *&c.* (ſubjicit prop. . . . .)

Dictis verò theorematis demonſtratis per ipſa reperiuntur complura cùm theoremata tum problemata, quale eſt hoc: quod *ſimilia ſphæroidea*, nec non *ſimiles ſphæroideum*, ac *conoideum* portiones *triplicatam*

inter

inter se rationem habent axium. Et, *quòd in sphæroidibus figuris æqualibus quadrata diametrorum proportione reciprocantur axibus*; &, *si in sphæroidibus figuris quadrata diametrorum reciprocentur axibus, æqualia sunt sphæroidea. Problema* verò hujusmodi: *A datâ portione sphæroidis aut conoidis, portionem abscindere plano ad datum planum parallelo, ita ut abscissa portio æquetur dato cono, vel cylindro, vel datæ sphæræ.* Præmittentes igitur & *theoremata*, & **epitagmata* ad eorum demonstrationes usum habentia, postea tibi *problemata* conscribemus. Vale.

* *hoc est, Propositiones Lemmaticas, vel subsidiarias.*

X. Si *conus* plano secetur in omnia coni latera incidenti, sectio vel *circulus* erit vel *ellipsis*: & siquidem igitur sectio sit *circulus*, liquet interceptam ab ipso portionem versùs verticem coni, fore conum. Si verò sectio sit *ellipsis*, è cono ad verticem dirempta figura dicatur *absegmentum* coni: Absegmenti verò basis dicatur *planum* ab *ellipse* comprehensum: *vertex* verò punctum, quod & coni *vertex* est: *Axis* verò à vertice coni ad centrum ellipsis connexa recta. ἀπότμαμα.

XI. Ac, si *cylindrus* duobus planis parallelis secetur in omnia cylindri latera incidentibus, sectiones vel *circuli* erunt, vel *ellipses æquales*, & mutuò sibi similes. Siquidem igitur sectiones circuli fiant, patet quòd resecta à cylindro figura inter parallela plana, cylindrus erit: sin verò sectiones fiant *ellipses*, absumpta à cylindro figura inter parallela plana cylindri segmentum vocetur: *bases* autem segmenti vocentur plana sub *ellipsibus* comprehensa: *Axis* autem recta *ellipsium* centra connectens. (Erit autem hæc in eadem recta cum axe cylindri.)

Hæc clara sunt, nec explicationem desiderant. Videntur autem loco suo excidisse; nos ea certè non immeritò definitionibus ac hypothesibus accensemus. Non sunt *epitagmata*, quæ pollicetur *Archimedes*, ut existimat non nemo.

Prop. I.

Si quotlibet sint magnitudines (a, b, c, d) *æquali sese excedentes, sit autem excessus æqualis minimæ* (a); *& aliæ magnitudines multitudine quidem æquales his, magnitudine verò æquales maximæ* (d); *omnes magnitudines, quarum unaquæque æquatur maximæ, omnium quidem æqualiter sese excedentium minores erunt quàm duplæ; reliquarum autem sine maximâ majores quàm duplæ.* Fig. 116.

Nam ſumma omnium æqualium maximæ eſt

$$\begin{array}{c} d \\ c+a \\ b+b \\ a+c \\ \hline \end{array}$$

hoc eſt $d+2c+2b+2a$; quæ ſumma deficit à dupla omnium per maximam d, & reliquarum duplam eodem exceſſu ſuperat.

Schol.

$$\begin{array}{c} 0.3.6.9. \\ 9.6.3.0. \\ \hline 9.9.9.9. \end{array}$$

1. Si quantorum talis ſeries (hoc eſt Arithmeticè proportionalium) incipiat à o (ſeu nihilo) & maximus terminus ſit d, numerus autem terminorum dicatur n; ſumma terminorum erit $\frac{nd}{2}$. quæ propoſitio nihil fermè differt ab hac *Archimedea*.

$$\begin{array}{l} a+0. \\ a+1x. \\ a+2x. \\ a+3x. \end{array}$$

2. Sit quælibet ſeries Arithmeticè proportionalium, in qua minimus terminus ſit a communis exceſſus x, & numerus terminorum dicatur n; liquet omnium ſummam eſſe $na+\frac{\left.\begin{matrix} nn \\ -n \end{matrix}\right\}x}{2}$.

Nam hæc ſumma conſtat ex ſerie æqualium, & ſerie arithmetica à nihilo incipiente, cujus maximus terminus eſt $nx-1x$.

Prop. II.

Si quotvis magnitudines (A, B, C, D) *aliis magnitudinibus multitudine æqualibus* (E, F, G, H) *binæ binis, prout ordine diſponuntur, proportionales ſint* A.B :: E.F *&* B.C :: F.G *&c*); *referantur *verò tam primæ magnitudines ad alias magnitudines* (K, L, M) *vel omnes, vel ipſarum aliquæ in quibuſvis rationibus, (ita ut, homologæ ſint in iiſdem rationibus* (A. K :: E. N. & B. L :: F. O *&c.*) *Omnes primæ magnitudines ad omnes quibuſcum conferuntur, eandem rationem habebunt, quam omnes poſteriores magnitudines ad omnes quas ipſæ reſpiciunt.*

* *rationem habeant.*

A.B.C.D. E.F.G.H.
K.L.M. N.O.P.

Nam ob K. A [a] :: N.E. & A.B [b] :: E.F. & B.L [b] :: F.O. erit ex æquo K.L :: N.O. Similique diſcurſu L.M :: O.P. Eſt autem A+B+C+D. A [c] :: E+F+G+H.E. & A. K [b] :: E. N. & K. K+L

a *hyp & cor. 45*
b *hyp.*
c 18. 5.

+

$+ M$ [c] $:: N. N+O+P.$ ergo ex æquo $A + B + C + D. K + L + M :: E+F+G+H. N+O+P.$ *Q.E.D.*

Prop. III.

Si quotcunque sint lineæ (X) æquales inter se, & earum unicuique spatium applicetur excedens figurâ quadratâ, latera verò (A,B,C,D) excessuum æquali sese excedant, & sit excessus æqualis minimo (A); sint verò etiam alia spatia, multitudine quidem æqualia his, sed magnitudine singula æqualia maximo (D X + Dq): hæc ad omnia quidem alia spatia minorem habebunt rationem eâ, quam habet æqualis utrique simul & lateri maximi excedentis quadrati, & uni æqualium, ad æqualem utrique simul, & tertiæ parti lateris maximi excedentis quadrati, & semissi unius æqualium; ad reliqua verò spatia sine maximo majorem rationem habebunt, eâdem ratione. Fig. 117.

Hoc est (si linearum multitudo dicatur n, & inæqualium spatiorum aggregatum dicatur Z) erit $nDX + nDq, Z \sqsupset X + D. \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}D.$ &, $nDX + nDq. Z -: DX + Dq \sqsubset X + D. \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}D.$

1. Nam quia [a] sunt AX, BX, CX, DX ut A, B, C, D; hoc est juxta primam hujus [b], erit $AX + BX + CX + DX \sqsubset \frac{nDX}{2}$. [c] item $Aq + Bq + Cq + Dq \sqsubset \frac{nDq}{3}$. est verò Z [d] $= AX + Aq + BX + Bq + CX + Cq + DX + Dq.$ [e] ergo $nDX + nDq. Z \sqsupset (nDX + nDq. \frac{nDX}{2} + \frac{nDq}{3} ::) X + D. \frac{X}{2} + \frac{D}{3}.$ *Q.E.D.*

a 1. 6.
b 1 hujus.
c 1 cor. 10. de Helic.
d hyp.
e 8. 5.

2. Porro, quia $AX + BX + CX$ [b] $\sqsupset \frac{nDX}{2}$, & $Aq + Bq + Cq$ [f] $\sqsupset \frac{nDq}{3}$. [e] erit $nDX + nDq. AX + Aq + BX + Bq + CX + Cq$ ([d] hoc est $nDX + nDq. Z -: DX + Dq$) [e] $\sqsubset nDX + nDq. \frac{nDX}{2} + \frac{nD}{3} :: X + D. \frac{X}{2} + \frac{D}{3}.$ *Q.E.D.*

f 2 cor. 10 de helic.

Prop. IV.

Fig. 118. *Si ab eadem parabola quomodocunque duæ resecentur portiones* (B V A, S D G) *quæ æquales habeant diametros* (V K, D E) *; tam ipsæ portiones æquales erunt, quàm ipsis inscripta triangula* (B V A, S D G) *basim habentia eandem cum portionibus, & eandem altitudinem.*

Sit primùm A K ad V K perpendicularis; & R, S sint parametri
a *sch* 49. 1. *Apol.* diametrorum V K, D E ergo ductâ G L ad D E (protractam) perpendiculari, est G Eq. G Lq [a]:: S. R :: [b]S × V K. R × V K [c]:: S × DE.
b 1. 6. R × V K [d]:: G Eq. A Kq. [e]unde G L = A K [f]ergo triangula G D E.
c 7. 5. A V K æquantur, & horum dupla triangula G D S, A V B; & ho-
d 11 & 49. 1. *Apol.* rum sesquialteræ parabolæ G D S, A V B. *Q.E.D.* Simili discursu
e 9. 5. quævis alia portio parem habens ipsi V K diametrum portioni B V A,
f 1. 6. adeóque portioni S D G æquabitur: unde constat propositum.

Cor. Si diametri V K, D E portionum æquentur, perpendiculares G L, A K æquabuntur.

Prop. V.

Fig 119. 120. *Omne spatium comprehensum ab ellipse* (V B X A) *ad circulum* (V ϛ X α) *habentem diametrum æqualem majori ellipsis diametro* (V X) *eandem rationem habet, quam minor ejus diameter* (B A) *ad majorem* (V X), *hoc est ad circuli* (V ϛ X α) *diametrum.*

* *intellige, spatio Elliptico.* Dico circulum diametro Z = √ V X × B A æquari *ellipsi. Si ne-
a 8. 1. *de sph.* gas, esto primùm circulus Z major ellipse; circulo igitur Z [a] inscriptum cogita polygonum parilaterum majus ellipse, & huic simile aliud circulo (V ϛ X α), à cujus angulis demittantur perpendiculares μ D, ν E &c. occurrentes ellipsi punctis M, N &c. & connectantur B M, M N, N V &c. Estque jam ϛ Cq. μ Dq [c]:: X C × C V. X D × D V
c 21. 1. *Apoll.* [c]:: B Cq. M Dq. & permutando ϛ Cq. B C q :: μ Dq. M Dq. unde
d 1. 6. ϛ C. B C ([d]hoc est triang ϛ D C. B D C) [e]:: μ D. M D ([d] hoc est
e 22. 6. triang μ ϛ D. M B D). [f] quare ϛ C. BC :: trapezium ϛ C D μ. BCDM.
f 12. 5. Simili discursu est trap μ D E ν. M D E N :: μ D. M D :: ϛ C. B C. idémque pariter ostendetur de reliquis trapeziis ac triangulis. [f] quare
g 1. 6. totum polygonum circuli V ϛ X α ad totum polygonum ellipsis se ha-
h 1. 12. bet ut ϛ C ad B C, vel V X ad B A; [g] hoc est ut V Xq ad V X × BA,
k 9. 5. [h] hoc est ut polygonum circuli V ϛ X α ad polygonum circuli Z. [k] ergo

go polygonum circuli Z ellipsis polygono æquatur; Sed majus erat toto spatio elliptico, quæ repugnant. Similis continget repugnantia, [1] *9. ax. 1.* si dicatur ellipsis major circulo Z; inscribendo scilicet ellipsi figuram quæ major sit circulo Z, & per ejus angulos ducendo perpendiculares D M μ, E N ν, &c. & inscribendo circulo Z figuram similem ipsi V ν μ ϵ X; unde demonstrabitur figura ellipsis æqualis figuræ circuli Z, quæ tamen toto circulo Z major ponebatur: ergo potiùs circulus Z ellipsi æquatur. Hinc ellipsis se habet ad circulum V ϵ X α, [p] ut circulus Z ad circulum V ϵ X α, [q] hoc est ut Zq [r] vel V X × B A ad V Xq, [s] hoc est ut B A ad V X. *Q.E.D.* p 7. 5. q 2. 12. r *hyp.* s 1. 6.

Facilè colligitur hoc viâ indivisibilium. Quoniam ϵ Cq. μ Dq :: X C × C V. X D × D V :: B Cq. M Dq. erit ϵC. B C :: μ D. M D :: ν E. N E. * :: ϵ C + μ D + ν E. B C + M D + N E. & omnes ϵ C, μ D, ν E componunt semicirculum V ϵ X, omnes verò B C, M D, N E conficiunt semiellipsim V B X; ergo simicirculus ad semiellipsim se habet ut ϵ C ad B C; vel ut ϵ α ad B A. 21. *1. Apoll.* * 12. 5.

Prop. VI.

Omne spatium comprehensum ab ellipse (V B X A) *ad quemlibet circulum* (Z) *eandem habet rationem, quam comprehensum ab ellipsis diametris* (V X, B A) *rectangulum ad quadratum* (Zq) *diametri circuli.* Fig. 121.

Nam ell. V B X A. ⊙ V ϵ X α [a] :: B A. V X [b] :: B A × V X. V Xq & ⊙ V ϵ X α. ⊙ Z [c] :: V Xq. Zq. ergo ex æquo ell. V B X A. ⊙ Z :: B A × V X. Zq. *Q.E.D.* a 5. *hujus.* b 1. 6. c 2. 12.

Prop. VII.

Sub ellipsibus (A B C D, E F G H) *comprehensa spatia eandem inter se rationem habent, quam comprehensa ab ellipsium diametris rectangula* (A C × B D, E G × F H) *inter se.* Fig. 122. 123.

Sit quivis circulus diametro Z; éstque A C × B D. Zq [a] :: ellips. A B C D. ⊙ Z. & Zq. E G × F H [a] :: ⊙ Z. ellips E F G H. ergo ex æquo A C × B D. E G × F H :: ellips A B C D. E F G H. *Q.E.D.* a 6 *hujus.*

Coroll.

Hinc liquet comprehensa sub ellipsibus similibus spatia homologorum diametrorum quadratis proportionalia fore.

Nempe

Nempe posito fore A C. B D :: E G. F H ; erit ellips A B C D. E F G H :: A Cq. E Gq :: B Dq. F Hq. Nam A C × B D. B Dq :: A C. B D :: E G. F H :: E G × F H. E Hq. & permutando AC × BD. E G × F H :: B Dq. F Hq, hoc est ellips A B C D. E F G H :: BDq. F Hq, vel A Cq. E Gq.

Lemmata.

I.

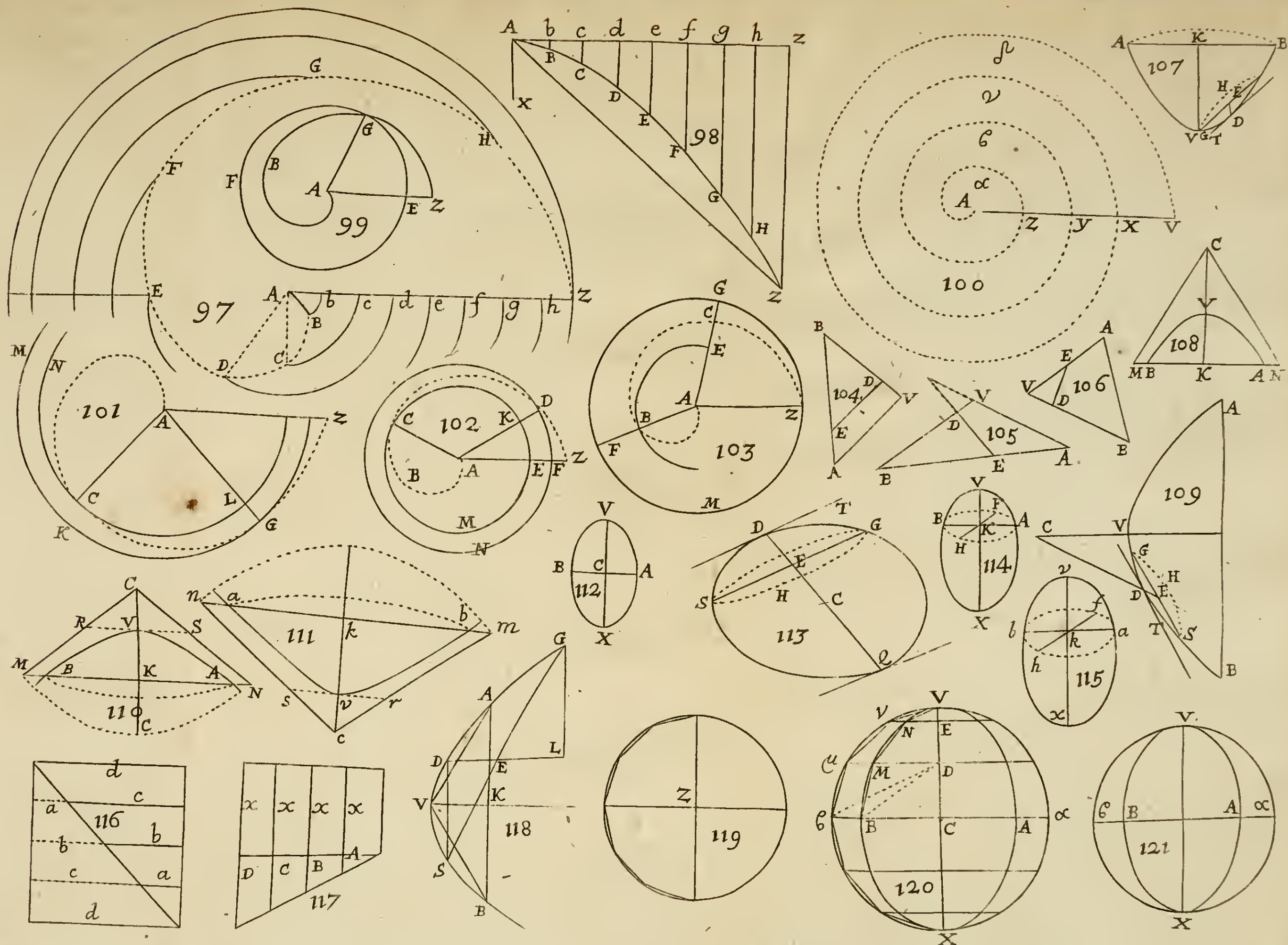
Fig. 124. Sit conus Scalenus, in quo B V A triangulum per axem rectum basi B F A ; recta verò V K bisecet angulum B V A, & B D sit ad V K perpendicularis ; si igitur per B D transeat planum B E D triangulo B V A rectum, [a]patet ellipsim fieri, cujus centrum C minor axis B D ;
a 13. 1 *Apol.* quòd si ducatur C E ad B D perpendicularis in dicto plano B E D,
b 4 *def.* 11. erit C E semiaxis major ; & C E plano V B A [b]recta erit, [c]adeóque
c 18. 11. planum per V C, C E plano V B A quoque rectum erit. Producatur
d 19. 11. V E, occurrens basi coni in F, & connectatur F K. [d] liquet F K (com-
e 6. 11. munem nempe sectionem planorum (B F A, V C E) rectam esse pla-
f 3. *def.* 11. no V B A ; [e]adeóque parallelam ipsi C E, [f] & perpendicularem ipsi
g 4. & 22. 6. B A. Est [g]igitur K Fq (B K × K A). V Kq :: C Eq. C Vq. Hæc analysis est *Archimedei* quod subsequitur *problematis*, perspicuitatis ergò apposita ; quali similem decimæ propositionis intelligentiæ conducentem, hujus exemplo, tibi deducendam relinquimus.

II.

Fig. 125. Recta VC bisecet angulum B V A, & B D ad V C perpendicularis sit ; oportet per B ducere rectam B A occurrentem rectæ V C protractæ in K, ita ut V Kq ad B K × K A rationem habeat datam V Cq ad Tq.

a 13. 6. Fiat V C. T [a]:: T. C H ; & ad C H [b] describatur segmentum cir-
b 35. 3. culi capiens angulum æqualem angulo C V B, & secet iste circulus
c *const.* & 15. 1 rectam V D in M ; & ductis M C N, M H, fiat B A ad N M paral-
d 4. 6. lela. Dico factum. Nam ob [c]æquiangula triangula C V N, C M H,
e 16. 6. f *const.* & 17. 6. erit V C. M C[d] :: C N. C H. unde M C × C N [e] = V C × C H [f] =
g *sch.* 23. 6. Tq. Est autem V Cq . C M × C N [g] :: V Kq. K B × K A. [h] ergo
h 7. & 11. 5. V Cq. Tq :: V Kq. K B × K A. *Q.E.F.*
l *const.* & 5. 1. Not. debet esse T ⊏ B C. quia quum angulus C D M sit [l]æqualis
m 16. 1. angulo C B X, [m]hoc est major angulo C N B, [n]erit M C. C D ⊏
n *sch.* 6. 6. o *sch.* 16. 6. C B. C N. [o]adeóque M C × C N ⊏ C D × C B, hoc est Tq ⊏ B Cq.

Prop.



97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121

Prop. VIII.

Datâ ellipse, & lineâ (C V) *à centro* (C) *ellipsis excitatâ, ad planum, in quo est ellipsis, rectâ, potest inveniri conus, qui verticem habeat excitatæ lineæ terminum* (V) *in cujus superficie sit ellipsis data.* Fig. 126.

Sit B D minor axis, & semiaxis major sit T. Jungantur B V, D V, & [a]fiat Tq. C Vq :: B K × K A. V Kq (quod fieri potest, quia T ⊏ B C). Erit B A diameter basis coni, cujus vertex V, qui complectitur datam ellipsim. [a] *Lemm. præc.*

Sit enim punctum quodvis L in ellipse, à quo demittatur L H perpendicularis ad B D [b](adeóque recta plano V B D, cui rectò insistit planum ellipsis). producatur V H M, & assurgat M N plano V B A recta, dicti coni superficiem attingens in N. Ducantur denuò per K, M rectæ P Q, R S ad B D parallelæ. Estque Tq. C Vq [c] :: B K × K A. V Kq. & C Vq. C Bq :: K Vq. K Pq :: K Vq. K P × K Q. ergo ex æquo Tq C Bq ([f]hoc est H Lq. B H × H D) :: B K × K A. K P × K Q [g] :: B M × M A. R M × M S. Item B H × H D. H Vq [g] :: R M × M S. M Vq ergo rursus ex æquo H Lq. H Vq :: B M × M A. M Vq. ([h]hoc est) :: M Nq. M Vq. [l]unde H L. H V :: M N. M V. [m] quare V L N est recta linea; [n]adeóque punctum L in superficie coni. Similíque ratione tota ellipsis est in eadem superficie. *Q.E.F.* [b] 4. *def.* 11. [c] *const.* [d] 4. & 21 6. [e] 7. 6. [f] 21. *1 Apoll.* [g] *sch.* 23. 6. [h] 35. 3. & 7. 5. [l] 22. 6. [m] *conv.* 4. 6. [n] 1. *1. Apoll.*

Prop. IX.

Datâ ellipse & lineâ (C V) *ab ellipsis centro* (C) *non rectò excitatâ in plano, quod per unam diametrum* (B D) *assurgit rectum plano, in quo est ellipsis; potest inveniri conus, verticem habens excitatæ terminum* (V), *in cujus superficie erit data ellipsis.* Fig. 127.

Conjungantur V B, V D, & fiat V A = V B; & connexâ B A, per C ducatur E F ad B A parallela. Sit autem T altera semidiameter datæ ellipsis; & [a]fiat E C × C F. Tq :: B Aq. Sq; tum in plano per B A ad planum V B A rectò [b]descripta sit ellipsis, cujus axes A B, S. Hanc complectatur conus habens verticem V (juxta præcedentem; is quoque datam ellipsim comprehendet. Sumatur enim in data ellipse quodvis punctum L, à quo ducatur L H perpendicularis rectæ B D [c] adeóque recta plano B V D) & extendatur V H M; & M N recta plano B V A (hoc est in plano repertæ ellipsis) coni superficiem attingat in N; & per M ducatur R S ad B D parallela. Estque Tq. [a] 13. & 12. 6. [b] 54. *1 Apol.* [c] 4 *def.* 11.

E C

d *conſt.* e 15. 5. f 21. *1 Apoll.* g *ſch.* 23. 6. h 22. & *conv.* 4 6.

EC × CF [d] :: Sq. BAq [e] :: $\frac{1}{4}$SQ, $\frac{1}{4}$BAq :: [f] MNq. BM × MA. Item EC × CF. BC × CD [g] :: BM × MA. RM × MS. ergo ex æquo Tq. BC × CD ([f] hoc eſt HLq. BH × HD) :: MNq. RM × MS. [g] quinetiam BH × HD. VHq :: RM × MS. VMq. ergo rurſus ex æquo HLq. VHq :: MNq. VMq. [h] unde patet punctum L eſſe in latere VN coni; ſimilique jure tota ellipſis eſt in ſuperficie dicti coni. *Q. E. F.*

Nota, ſi EC × CF = Tq, fore BA diametrum circuli, ſeu baſis dicti coni.

Prop. X.

Fig. 128.

Datâ ellipſe, & lineâ (CD) *ab ellipſis centro* (C) *erectâ in plano, quod ab una diametro* (AB) *excitatur rectum plano, in quo eſt ellipſis; poteſt inveniri cylindrus, axem habens in directum excitatæ lineæ* (CD), *cujus in ſuperficie erit data ellipſis.*

a *ſch.* 2. 6. b 4 *def.* 11. c *hyp.* d 21. *1 Apol.* e *ſch.* 23. 6. f 9. 5. g 35. 3. h *conſt.* & 4. *def.* 11. k 6. 11.

Ducantur AF, BG ad CD parallelæ, quas perpendiculariter ſecet recta FDG; & ob AC = CB, [a] eſt FD = DG. Jam Si FG alteræ ellipſis diametro NO æquetur, erit circulus centro D per F, G deſcriptus, & rectus plano FABG, baſis cylindri, quem deſideramus. Sit enim quodvis punctum H in ellipſe; à quo ducatur HK ad AB [b] perpendicularis, & per K ducatur KL ad CD parallela; & ſit LM ad FG perpendicularis. & quoniam HKq. NCq [c] (FDq) :: [d] AK × KB. ACq [e] :: FL × LG. FDq; erit HKq [f] = FL × LG [g] = LMq. ergo HK, LM ſunt pares. Sed & ambæ [h] rectæ ſunt plano FABG; [k] adeóque parallelæ. ergo liquet punctum H eſſe in latere dicti cylindri per M ducto.

Quòd ſi NO major ſit quàm FG, fiat FP = NO; erit FP diameter baſis cylindri, itidem rectæ plano FDC. quod è ſimili conſtabit diſcurſu.

l *ſch.* 47. 1. m 18. 11. n 4. *def.* 11. o 3. *def.* 11. p 28. 1. q *conſtr.* r 10. 11. s 4. & 22. 6.

Sin demùm ſit NO minor quàm FG, [l] fiat DX = √: DFq — CNq. & plano ACX recta erigatur XR = CN, & connectatur DR; erit circulus radio DR, in plano FDR deſcriptus, baſis cylindri, qui datam ellipſim complectetur. Nam ſtantibus, quæ priùs adſumpta ſunt, ducantur LS ad FG, & ST ad KL protractam perpendiculares. Et quia plana RXD, FDX ſibi mutuò [m] recta ſunt, [n] erit FD recta plano RXD, [o] adeóque lineæ RD; [p] ergo RD, SL parallelæ ſunt. Sed & DX, LT [q] parallelæ ſunt. [r] ergo triangula RDX, SLT ſimilia ſunt. [s] Quamobrem eſt STq. SLq ([g] FL × LG)

× L G) :: R Xq. R Dq. (D Fq.) nam eſt R Dq [t] = D Xq + XRq [t 47. 1.] [q] = D Fq — C Nq + C Nq = D Fq). Item F L × L G. A K × K B [e] :: F Dq. A Cq. ergo ex æquo S Tq. A K × K B :: R Xq [q] (N Cq) A Cq [d] :: H Kq. A K × K B. [f] quare S Tq = H Kq. ergo cùm ſint S T, H K parallelæ (perpendiculares enim ſunt ambæ plano FAKLT. Nam planum S T L [u] rectum eſt plano F L T; adeóque S T ei recta) ſitque punctum S in ſuperficie dicti cylindri, erit H in eadem, & pari ratione tota data ellipſis. *Q. E. F.* [u 15. 11.]

Prop. XI.

Quòd quidem omnis conus ad conum compoſitam habeat rationem ex rationibus baſium & altitudinum demonſtratum eſt ab anteceſſoribus; [ſch. 15. 12.] *& non abſimili modo demonſtratur quòd abſegmentum omne coni ad abſegmentum coni rationem habet compoſitam è rationibus baſium & altitudinum. Necnon quòd omne ſegmentum cylindri tripla ſit abſegmenti conici baſim habentis eandem cum ſegmento, & æqualem altitudinem:* 10. 12. *eadem ſcilicet eſt demonſtratio cum illa, quòd omnis cylindrus triplus eſt coni baſin habentis eandem cum cylindro, & æqualem altitudinem.*

Scholium.

Etiam hæc ſimili diſcurſu eliciantur.

1. Æquè alta ſegmenta cylindrica, & conica, baſibus proportionalia ſunt. *Vid.* 11. 12.

2. Segmenta ad æquales baſes conſtituta ſunt inter ſe ut altitudines. 14. 12.

3. Æqualium ſegmentorum proportione reciprocantur baſes & altitudines. 15. 12.

Similia ſegmenta triplicatam habent rationem homologorum in baſibus diametrorum, (vel axium ſuorum). 11. 12.

Prop. XII.

Si conoides parabolicum ſecetur plano (D V K) *per axem* (V K) *vel ad axem parallelo* (D E G); *fiet coni ſectio eadem illi, quæ figuram intercipit; diameter autem ipſius erit communis ſectio* (V K *vel* D E) *planorum; ejus* (D E G) *quod figuram ſecat, & ejus* (V D E K) *quod per axem ducitur rectum ſecanti plano. quòd ſi etiam ſecetur plano ad axem recto* (B G A) *ſectio erit circulus, habens centrum* (K) *in axe.* [*Pars* 1. A.] [Fig. 129.]

 Quòd

Quòd plano per axem procreetur parabola eadem illi cujus circumductu fiebat conoides, quódque plano ad axem recto intercipiatur circulus, in axe centrum habens, ſatis ex ipſa conoidis generatione perſpicuò conſtat. Quòd autem ſectio D G ſit parabola, primò poſitæ æqualis ſic oſtendetur. Sumatur in ſectione quodvis punctum G, à quo ducatur G E ad D E perpendicularis, [a]adeóque recta plano V D E
a 4. *def.* 11. (cui nempe planum D E G rectum ponitur). Per E ducatur B A ad
b 4. 11. D E, vel V K perpendicularis; [b]ergo D E plano per B E, E G recta
c 8. 11. eſt; [c] ergo axis V K eidem rectus eſt; quare B G A eſt circulus ad
d 35. 3. diametrum B A. Sit demum R parameter parabolæ B V A, & duca-
e 5. 2. tur D Z ad V K perpendicularis. Eſtque E Gq [d] = B E × E A [e] =
f 3. *ax.* 1. B Kq — E Kq [f] = B Kq — D Zq. Eſt verò B Kq [g] = R × V K, &
g 11. *1 Apol.* D Zq [g] = R × V Z; [f] adeóque B Kq — D Zq = R × Z K = R × D E.
h 1. *ax.* 1. [h] ergo E Gq = R × D E. [k] unde ſectio D G erit parabola, cujus pa-
k *conv.* 11. *1 Apol.* rameter R. *Q.E.D.*

Pars 2. B. Fig. 130. *Si conoides hyperbolicum ſecetur plano* (D V K) *per axem* (V K) *vel ad axem parallelo* (D E G) *vel* (*plano* D F H) *per coni conoides complectentis verticem* (C) *erit ſectio hyperbole; ſiquidem per axem eadem erit ei quæ figuram concepit; ſin æquidiſtanter axi, ſimilis illi; at ſi per verticem coni conoides complectentis, diſſimilis ei. diameter autem ſectionis erit communis ſectio* (V K, *vel* D E, *vel* D F) *planorum; ejus quod ſecat figuram, & ejus quod per axem ducitur rectum ſecanti plano. Quòd ſi ſecetur plano* (B G A) *ad axem recto ſectio erit circulus habens centrum in axe.*

Quòd ſectio (D V K) per axem hyperbolam reddit illam, quæ conoides ipſum progenuit; & quod planum axi rectum intercipiat circulum, ſatis evidens eſt. Quòd ſi D E ſit axi parallela; ſint T V, V R latera hyperbolæ D V K, & à D ducatur D Z ad V K parallela; & protractâ E D fiat D X = T Z + V Z (T V + 2 V Z). & T V. V R :: X D. D S; faciant verò T V, V R, & X D, D S angulos utcunque; & connexæ T R, X S producantur. Sumatur jam in ſecti-
a *hyp.* & 4 *def.* 1. one punctum quodvis G; à quo ducatur G E ad D E, [a] (adeóque ad
b 35. 3. planum D V K) perpendicularis; & per E ducatur B A ad V K per-
c 5. 2. pendicularis, & E L ad D S parallela; denique per puncta Z, K du-
d 12. *1 Apol.* cantur Z Q, K P ad V R parallelæ. Eſtque jam E Gq [b] = B E × EA
e 1. 6. [c] = B Kq — E Kq = B Kq — D Zq [d] = V K × K P — V Z × Z Q. verùm (ductâ Q Y ad V K parallelâ) eſt V K × K P [e] = V Z × Z Q

+

$+ YP + QY \times KP = VZ \times ZQ + VZ \times YP + QY \times KP$. f 2, *ax.* 1.
[f] ergo $EGq = VZ \times YP + QY \times KP$. est autem [g] XD, DS :: TV. VR. [h] hoc est XE. EL :: QY. YP; (vel) :: DE. YP. [k] adeóque $EL \times DE = XE \times YP$ [l] $= TK + VZ \times YP$ [e] $= TK \times YP + VZ \times YP$ (hoc est) $= QY \times KP + VZ \times YP$; (ob TK. KP [m] :: QY. YP; [k] adeóque $TK \times YP = QY \times KP$) [n] ergo $EGq = EL \times DE$. [o] quare liquet punctum G esse in hyperbola, cujus latera XD, DS, diameter DE; quæ quidem hyperbola similis est ipsi BVA, quia XD. DS [i] :: TV. VR. *Q.E.D.*

g *const.* h 4.6. & 11.5. k 16. 6. l *const.* m 4. 6. n 1. *ax.* 1. o *conv.* 12. *I Apol.*

Coroll. $XD = TV + VZ = 2CZ$.

$$DS = VR + \frac{VR}{TV} 2VZ.$$

Quòd verò plani sectionem attinet per centrum C ductam, producatur FDC ad N, ita ut sit $CN = CD$; & sectionem DVK tangant rectæ VM, DM; & sumpto in sectione DF puncto quovis H ducatur HF ad DF perpendicularis, (adeóque recta plano FDVK) & per F ducantur BA ad VK perpendicularis, & FO ad DM parallela. Estque $BF \times FA$. (FHq). FOq [p] :: MVq. MDq. ergo ordinatim applicatarum FH in sectione DH quadrata [q] se habent ut quadrata FO in sectione DO, [r] hoc est ut rectangula NFD. [s] ergo DH est hyperbole, cujus ND est axis transversus. quia verò EGq [t] $\sqsubset$ FHq; & $XE \times ED \sqsupset NF \times FD$ (quia $DE \sqsupset DF$ & $XD = 2CZ \sqsupset 2CD$) non erit EGq. $XE \times ED$ :: FHq. $NF \times FD$; [u] hoc est non erunt harum sectionum latera sibi proportionalia; nec ideo similes erunt. ergo cùm sectio DG [y] sit ipsi BVA similis; erit sectio DH eidem dissimilis. *Q.E.D.*

p 16. 3 *Apoll.* q 16.5. r 21. *I Apoll.* & *cor.* 51. 1. s *conv.* 21. *I. Apoll.* t *cor.* 5. 2. u 21. *I. Apoll.* y *priùs.*

Si quodvis sphæroides secetur plano (VBXA) *per axem* (VX) *vel ad axem parallelo* (DEL) *sectio erit ellipsis, siquidem per axem, ipsa illa quæ figuram concepit; sin æquidistanter axi, similis ei; diameter verò sectionis erit communis sectio* (DE) *planorum; ejus nempe quod secat figuram, ejusq; quod per axem ducitur rectum secanti plano: quinetiam si secetur plano recto ad axem, sectio circulus erit, habens centrum in axe.* Pars 3. C. Fig. 131.

Primum & ultimum è *sphæroidis* ortu satis liquidò verificantur.

a 16. 3 *Apol.* b *conv.* 32. *I. Apol.* & 33. 1. *elem.* c 4. & 22. 6. d 11. 5. e *conv.* 21. *I. Apol.* f *constr.* g 15. 5.

Porro recta A V connectat axium (A B, V X) terminos A, V; & ducatur E S ad A V, & D S ad A B parallelæ. Sumatur autem utcunque punctum L in sectione, à quo ducatur L H ad D E perpendicularis; & per H recta M N ad V X perpendicularis. demùm rectæ A T, V T sectionem V A X contingant. Estque M H × H N (H Lq) D H × H E [a] :: V Tq. A Tq [b] :: C Aq. C Vq [c] :: D Sq. DEq. [d] :: H Lq. D H × H E. [e] ergo sectio D L E est ellipsis, cujus axes sunt D E, D S; & similis ipsi V B X A; quia D S. D E [f] :: C A. C V [g] :: B A. V X.

Pars 4. D. Fig. 132.

Si dictarum figurarum qualibet plano (B V A) *per axem* (V K) *secetur; à punctis* (G) *in superficie figuræ extra sectionem existentibus ductæ ad planum secans perpendiculares* (G E), *intra figuræ sectionem cadent.*

a 18 11. b *prius.* c 38. 11. *

Per G ducatur planum axi, [a] (adeóque plano per axem) rectum; [b] ergo communis sectio B A erit diameter circuli B G A. [c] & perpendicularis G E cadet in B A. * ergo punctum E est intra sectionem B V A. Cunctis his subjecit *Archimedes:* Horum omnium perspicuæ sunt demonstrationes. Ita visum illi ὀξυδερκεῖ. Nos tamen lucem iis qualemcunque conati sumus accommodare; non nemo certè spissas tenebras offudit. (Cui placet immani tædio vexari, *Rivaltum* adeat in hæc commentantem, ipsiúsque desiderio, ni fallor, abundè satisfiet).

Prop. XIII.

Fig. 133.

Si conoides parabolicum plano secetur, neque per axem (V K) *nec æquidistanter axi, sectio* (D L E) *erit ellipsis. Diameter autem ejus major, erit recta* (D E) *intercepta in conoide à facta sectione planorum & ejus quod figuram secat, & ejus quod per axem transit rectum secanti plano: minor autem diameter æqualis erit distantiæ* (D F) *ductarum à majoris diametri terminis axi parallelarum* (D Q, E F).

a *hyp.* & 4 *def.* 11. b 35. *I Apol.* c 2. 6. d 7. 5. e 4. & 22. 6. f 16. 3. *Apol.* g 11. 5. h 21. *I Apol.*

Capiatur enim in sectione punctum quodvis L, à quo ducatur L H ipsi D E, [a] adeóque plano V D E, perpendicularis. & per H ducatur B A axi perpendicularis. Rectæ porro T S ad D E, & V N ad B A parallelæ tangant sectionem D V E, & ducatur T P ad V K perpendicularis. Estque ob V S [b] = P V, [c] etiam N S = N T. [d] ergo NSq. N Vq [e] (hoc est :: D Eq. D Fq) N Tq. N Vq [f] :: D H × H E. B H × H A (hoc est) :: D H × H E. H Lq [g] :: D Eq. D Fq. ergo sectio D L E habet proprietatem ellipsis, cujus axes D E, D F. *Q. E D.*

Prop.

Coroll. Q H (æqualis dimidiæ distantiæ) est semiaxis minor.

Prop. XIV.

Si conoides hyperbolicum secetur plano (D E L) *coincidenti omnibus lateribus coni conoides complectentis, non ad rectos axi* (V K) *sectio erit ellipsis, ejus autem major diameter erit illa* (D E) *quæ intercipitur à conoide à facta sectione planorum & ejus quod secat figuram, & ejus quod per axem ducitur rectum secanti plano.* Fig. 134.

Nam eâdem factâ præparatione, qualis in præcedenti, monstrabitur fore semper D H × H E. H Lq :: N Tq. N Vq. [a] unde sectio erit ellipsis, & diameter ejus D E, major quidem alterâ, quia P V [b] ⊏ V S; [c] adeóque T N ⊏ N S [d] ⊏ N V.

a *conv.* 21. *I Apol.*
b *cor.* 36. *I Ap.*
c 2.6. & 14.5.
d 19. 1.

Coroll. Si fiat T N, N V :: E D. M. erit M altera diameter.

Prop. XV.

Si oblongum sphæroides secetur plano (D E L) *non recto ad axem* (V X), *sectio erit ellipsis. Diameter autem ipsius major erit illa* (D E) *quæ intercipitur in sphæroide à facta planorum sectione, ejusque quod secat figuram, & illius quod per axem ducitur secanti plano rectum.* Fig. 135.

Quòd sectio sit ellipsis, cujus diameter D E non secus quàm in præcedentibus facilè apparet. Quòd verò D E sit major è diametris, hinc (admissis quæ priùs) patet, Per centrum C ducantur *b a* axi V X perpendicularis, & *d e* ad B A parallela. Et quoniam quadrata ex *d e*, *b a* [a] se habent, ut N Tq ad V Nq, hoc est ut D Eq ad quadratum alterius diametri, & sit *d e* major quàm *b a*, erit D E major altera diametro. *Q.E.D.* a 16. 3. *Apoll.*

Coroll. I.

Siquidem prolatum sphæroides plano secetur; alia quidem eadem erunt, sed intercepta in sphæroide linea (qualis D E) minor erit diameter.

II.

Ex iisdem quoque patet in omnibus figuris, quòd si parallelis planis secentur ipsarum sectiones similes erunt.

Nam quadrata è perpendicularibus L H ad comprehensa sub segmentis D H, H E rectangula semper easdem obtinebunt rationes,

æquales ſcilicet ei, quam habent V Nq ad N Tq.

Coroll. III.

Si fiat T N. N V :: E D. M. erit M altera diameter.

Prop. XVI.

Fig. 136. *In conoide parabolico à quibuſcunque punctis* (D) *in ſuperficie conoidis ductis ad axem* (V K) *parallelis* (F D E), *quæ* (B F) *in eaſdem partes ducuntur, ad quas ſunt ejus gibba, cadent extra conoides, quæ verò ad alteras* (DE) *intra.*

a 12 *hujus.* b 26. I *Apol.* c *hyp.* Nam ſi per E F & axem V K ducatur planum, [a] faciet parabolam, [b] extra quam D F tota cadet, & D E intra; quia eſt F E ad V K parallela.

Prop. XVII.

Fig. 137. *In conoide hyperbolico, à quibuſcunque punctis* (D) *in ejus ſuperficie, ductis rectis* (F D E) *parallelis alicui rectæ* (C G) *quæ eſt in conoide, ducta per coni conoides complectentis verticem* (C), *quæ* (D F) *ad eaſdem partes ducuntur, ad quas ſunt ipſius gibba, cadent extra conoides, quæ* (D E) *ad alteras, intra.*

a 12 *hujus.* B. b 47. I *Apol* Nam ſi per C G, & D E ducatur planum [a] fiet hyperbola, cujus centrum C, [b] ergo ducta C D H, & C G erunt diametri; quapropter D E his intercidens tota ad partes E intra, verſùs F verò extra ſectionem cadet.

Prop. XVIII.

Fig. 138. *Si figuras conoides tangat planum* (D T) *non ſecans conoides, in uno tantùm puncto tanget; & per tactum* (D) *& axem* (V K) *ductum planum* (D V K) *rectum erit tangenti plano* (D T).

a 8 *def.* 11. b 12 *hujus.* c 10. I *Apol.* d 7. 11. e 12 *hujus.* Si fieri poteſt, tangat planum D T etiam in Y, & per puncta D Y ducantur rectæ D E, Y Z axi parallelæ; itaque ductum per has planum aut per axem tranſit, aut [a] ei parallelum eſt; ínque conoidis ſupeficie ſectionem [b] efficit coni, [c] quam recta D Y ſecat; cùm igitur D Y [d] ſit in plano D T, hoc ſecabit conoides, adverſùs hypotheſin.

f *priùs.* g 18. 3. Porro ducatur D N axi perdendicularis; [e] hæc diameter erit circuli ad planum D V K recti, cujus cum tangenti plano communis ſectio ſit recta D T; hæc igitur circulum tanget ([f] nec enim ſecat) [g] unde

de D T ad D N perpendicularis erit, & proinde [h]recta plano D V K. ergo planum quodque per D T, adeóque planum tangens [k]rectum erit plano D V K. *Q.E.D.* h 4 def. 11. k 18. 11.

Coroll. Quævis in plano tangenti recta conoidi occurrens tangit conoides; & quamlibet in conoidis superficie factam sectionem. Nam si recta conoides ipsum, aut in ejus superficie factam sectionem aliquam secaret, planum (contra hypothesin) secaret conoides.

Prop. XIX.

Si sphæroidon figurarum quamlibet tangat planum, figuram non secans, in uno solùm puncto tanget; quodque per tactum, & axem ducitur planum, tangenti plano rectum erit.

Prorsus eodem modo demonstratur quo præcedens.

Prop. XX.

*Si (*conoideon aut) sphæroideon figurarum quælibet secetur plano per axem* (V X) *& sectionem contingens ducatur recta quædam* (D T), *& per tangentem erigatur planum plano secanti rectum, continget figuram in eodem puncto* (D), *in quo & recta* (D T) *coni sectionem tangit.* Fig. 139.

**Ita puto scripsisse Archimedem.*

Nam si fieri potest alibi tangat dictum per D T planum, puta in G; & à G ducatur G E recta plano D V X; [a]cadet hæc in ipsam D T; [b]unde punctum E [c]erit intra coni sectionem, contra hypothesin. a 38. 11. b 38. 11. c 12. huj. D.

Prop. XXI.

Si figurarum sphæroidon aliquam duo plana parallela (R T, B S) *contingant, contactus jungens* (B A) *per sphæroidis centrum* (C) *transibit.* Fig. 140.

Planum per B, & axem V X plano tangenti B S [a]rectum est; [b]adeóque plano A T. planum per A, & axem tangenti plano A T [b]rectum est; [b]ergo plana B V X, A V X aut parallela sunt, aut coincidunt; [c]non illud, ergo hoc. Igitur communes plani B V A X cum tangentibus planis sectiones B S, A T [d]parallelæ sunt; & [e]tangunt ellipsim B V A X, [f]ergo recta B A per centrum transit. *Q.E.D.* a 19 huj. b sch. 14. 11. c 8. def. 11. d 16. 11. e hyp & cor. 18 hujus, f conv. 27. 2 Apol.

Prop.

Prop. XXII.

Fig. 141. *Si figurarum sphæroidum quamcunque contingentia dicantur duo parallela plana (B S, A T) ducatur autem per sphæroideos centrum (C) planum aliquod (D E) tangentibus parallelum; quæ per effectam sectionem ducuntur tactus conjungenti (B A) parallelæ (D M) extra sphæroides cadent.*

Sumatur in sectione punctum quodvis D, & per B A ac D duca-
a 16. 11. tur planum, cujus cum parallelis planis communes sectiones sint rectæ
b 21 hujus. S R, D E, T X. hæ igitur [a]parallelæ sunt, & D E per centrum tran-
c hyp. sit, quia centrum est tam in [b]recta B A, quàm in [c]plano per D E) &
d 12. hujus. C. sectio B D A E est [d]ellipsis (aut fortè circulus) & B S, A T hanc se-
e cor. 18. huj. ctionem [e]tangunt, adeóque B A, D E sunt [f] diametri [g]conjugatæ. [h]er-
f conv. 27. 2 Apol. go quæ per D ducitur ad B A parallela (D M) tangit sectionem
g 47. 1 Apol. B D A E adeóque sphæroides ipsum. *Q.E.D.*
h 32. 1 Apol.

Prop. XXIII.

Fig. 142. *Omnis figura sphæroides (V D X E) secta plano (D E) per centrum (C) bipertitur à plano, cùm ipsa, tum superficies ejus.*

Operam ludat, opinor, qui rei tam claræ lucem conetur addere. Sanè si (ducto per axem V X plano ad planum D E recto) semi-ellipses D V E, D X E similes sint & æquales, quidni eodem modo portiones sphæroides D V E, D X E æquentur & assimilentur penitus? sibi congruent utique: plura tædet.

Prop. XXIV.

Fig. 143.
*lego σχᾶμα pro τμᾶμα.
*lego ἐχόντων συγκείμενον, pro ἐχόντων τῶν συγκειμένων.

*Datâ cujuscunque conoidis portione (B V A) resectâ plano (B O A) recto ad axem (V K) (vel cujuslibet sphæroidis non majoris dimidio sphæroide portione similiter abscissâ) possibile est figuram solidam inscribere, & aliam circumscribere, è cylindris æquè altis *compositam, ita ut figura circumscripta superet inscriptam minori quàm propositâ quâcunque solidâ magnitudine (Z).*

a 12 hujus. Secetur conoides plano per axem ad planum B O A recto, [a]faciente coni sectionem B V A; & super circulum B O A constituatur cylindrus B P Q A, habens eundem cum conoide axem V K; qui quidem

dem, *æquisecto axe in punctis N, M, L, [b]sic dividatur ut sit cylindrus B X X A, altitudine K L, minor dato solido Z. Per divisionum verò puncta L, M, N ducantur rectæ X S ad B A parallelæ, sectioni occurrentes punctis B, A; per quæ ducantur rectæ *l* λ, *m* μ, *n* ν ad V K parallelæ. Jam circa axem V K circumvolutâ figurâ B κ λ μ ν ν μ λ κ A liquet [c]effici figuram conoidi circumscriptam, constantem è cylindris B κ, B λ, B μ, B ν æquè altis (nam rectæ κ B, λ B, μ B &c [d]cadunt extra conoides; & rectæ B A sunt [a]diametri circulorum parallelorum ipsi B O A; & altiuditnes K L, L M &c [e]æquantur). Item circumductâ figurâ *l m n* B A *n m l*, patet inscriptam esse conoidi figuram, itidem è cylindris æquè altis compositam; (nam rectæ *l* B, *m* B, *n* B intra sectionem jacent &c) quia verò cylindrus B *l* [f]æquatur cylindro B λ, & cylindrus B *m* cylindro B μ, & [f]cylindrus B *n* cylindro B ν; liquet circumscriptam excedere inscriptam cylindro B κ, hoc est minore quàm solido Z. *Q.E.F.*

b 1. 10. & 11 12. *

c 21. *def.* 11.

d 16, 17, 22 *h.*

e *const.*

f 11. 12.

Coroll. Cylindrus B κ est excessus figuræ circumscriptæ supra inscriptam.

Prop. XXV.

Datâ conoidis cujuscunque portione (B O A) *resectâ plano* (B O A) *non rectâ ad axem* (*vel sphæroidis cujuslibet non majoris dimidio sphæroide similiter resectâ potest ipsi figura solida inscribi, aliáque circumscribi, ita ut figura circumscripta inscriptam excedat minori, quàm propositâ quacunque magnitudine solidâ* (Z).

Fig. 143.

Secetur conoides plano per axem ad planum B O A recto; [a]ita ut fiat coni sectio B V A, cujus communis cum plano B O A sectio B R [c]erit diameter ellipsis B O A. sectionem vero B V A [c]tangat recta R Q ad B A parallela in V; à quo [d]ducatur sectionis diameter V K. Super ellipse verò B O A [e]constituatur segmentum cylindricum B P Q A, habens axem K V: æquisecetur autem V K in punctis L, M, N, ita ut ducto per L plano ad B O A parallelo, [f]sit segmentum cylindricum B κ κ A minus dato solido Z. Per dicta porro divisionum puncta ducantur rectæ X S ad B A parallelæ, sectioni occurrentes punctis B, A; unde ductis per B A planis ad ipsum B O A parallelis (hoc est rectis plano B V A)[b]fient ellipses, quarum diametri B A; ad quas utrinque [e]constituantur cylindrica segmenta B *l*, B λ; B *m*, B μ &c. quorum axes K L, L M, M N &c æquales inter se. Factum constat, ut in præcedente; quid plura?

a 12. *hujus.*

b 13, 14, 15 *h.*

c *sch* 53. 2 *Ap.*

d 10. 1.

e 10. *hujus.*

f 1. 10.

His prælibatis, *demonstremus quæ de figuris proposita sunt.

*(*Subjicit Archimedes*)

Hactenus nempe propositiones lemmaticas præstravit, jam principales aggreditur, quibus istæ deserviunt.

Prop. XXVI.

Fig. 143. *Quæcunque portio* (B V A) *conoidis parabolici resecti plano* (B O A) *recto ad axem* (V K) *sesquialtera est coni* (B V A) *basin habentis eandem portioni, & axem.*

Si fieri potest, sit primò port B V A $\sqsubset \frac{3}{2}$ con B V A. Portioni circumscribatur figura (quæ vocetur φ) & inscribatur altera (quæ dicatur ψ) utraque constans cylindrulis, juxta 24 hujus, ita ut $\varphi - \psi \sqsupset$ port A B C $- \frac{3}{2}$ con A B C; unde cùm [a]sit $\varphi \sqsubset$ port A B C, erit ψ

a 9. *ax.* 1. b 10. 12. $\sqsubset \frac{3}{2}$ con A B C [b] $=$ cyl $\frac{BPQA}{2}$. Sunt autem figuræ circumscrip-

c *const.* d 11. 12. e 2. 12. f 20. *1 Apol* ptæ cylindri [c](æquè scilicet alti) B κ, B λ, B μ, B ν ad se ordine [d] ut suæ bases, [e]hoc est ut quadrata radiorum B K, B L, B M, B N, [f] hoc est ut axes V K, V L, V M, V N, [c] hoc est juxta hypothesin primæ hujus. ergo cùm cylindrus B P Q A [c]æquetur totidem æqualibus horum maximo B κ; & figura ψ [g] ipsis his omnibus, dempto maximo

g *cor.* 24 *huj.* h 1 *huj.* B κ; [h]erit cyl $\frac{BPQA}{2} \sqsubset \psi$. sed priùs erat $\psi \sqsubset$ cyl $\frac{BPQA}{2}$: quæ repugnant.

k 24 *hujus.* l 9. *ax.* 1. m 10. 12. n 1 *hujus.* Sin verò dicatur esse $\frac{3}{2}$ con B V A $\sqsubset$ port B V A; [k]sit jam $\varphi - \psi \sqsupset \frac{3}{2}$ con B V A $-$ port B V A; adeóque cùm sit port B V A [l] $\sqsubset \psi$, * erit $\varphi \sqsupset \frac{3}{2}$ con B V A, [m]hoc est $\varphi \sqsupset$ cyl $\frac{BMNA}{2}$, [n]quod est absurdum.

Ergo potiùs est portio B V A $= \frac{3}{2}$ con B V A. *Q.E.D.*

o 11. & 2. 12. p 20. *1 Apol.* q 11. 12. r 7. 5. s 2 *hujus.* t 1 *hujus.* *Archimedes* adhibet secundam hujus, hoc fermè pacto. Quoniam est cyl B|B κ. L A [o]:: (B Kq. B Lq [p]::) V K. V L. & cyl X S. *m* A XS [o]:: (B Kq. B Mq [p] ::) V K. V M. & simili modo cyl X S. *n* A :: V K. V N; & sunt cylindri X S [q]æquales inter se, [r] adeóque proportionales totidem æqualibus ipsi V K, [s] ergo erit illorum summa (hoc est cylindrus B φ Q A) ad omnes *l* A, *m* A, *n* A, ut totidem V X ad V L + V M + V N; [t] hoc est in majori ratione quàm 2 ad 1 *&c.* Res eodem recidit, at noster modus simplicior videtur, & clarior; qualem proinde nos in sequentibus haud verebimur usurpare.

Cylindri.	*Rectæ.*
XS.XS.XS.XS.	VK.VK VK.VK.
l A. *m* A. *n* A.	VL.VM.VN.

Cor.

Cor. Conoidis parabolici portio dimidia est cylindri ad æqualem basin & æquè alti.

Cor. 2. Hinc datâ parabolici conoidis portione rectò abscissâ, facilè reperitur æqualis ei conus, aut cylindrus, Fig. 144.

Si protrahatur axis K V ad D, ut sit D V $= \frac{1}{2}$ K V. erit conus B D A $= \frac{3}{2}$ con B V A $=$ port B V A.

Schol.

Indivisibilium methodo facilè deducitur hæc propositio. Sit enim VN $= a$, U K $=$ A; parameter r, vel R. éstque

$$\left.\begin{array}{l} BNq = ra \\ BMq = 2ra \\ BLq = 3ra \\ BKq = RA \end{array}\right\} \alpha\ \text{Summa est } \frac{RAA}{2} \text{ ergo summa circulorum B A est } \frac{\varpi}{\delta}\frac{RAA}{2}. \ {}^{*}\text{Conus B V A est } \frac{\varpi}{\delta}\frac{RAA}{3}. \text{ ergo.}$$

[α] *sch.* 1 *huj.*

* *hoc est* $\frac{BKq \times VK}{3}$

Prop. XXVII.

Quinetiam si plano (B O A) *non rectò ad axem à conoide parabolico resecetur portio* (B V A), *similiter sesquialtera est segmenti coni* (B V A) *basin habentis eandem cum portione, & axem eundem.* Fig. 145.

Si fieri potest, sit port B O A $\sqsubset \frac{3}{2}$ segm B V A, portioni circumscribantur & inscribantur figuræ (quæ dicuntur φ ψ) constantes segmentis cylindricis, juxta 25 hujus, ita scilicet ut $\varphi - \psi \sqsupset$ port B V A — segm B V A. unde erit $\psi \sqsubset \frac{3}{2}$ seg B V A. Sunt autem segmenta cylindrica B κ, B λ, B μ, B ν, [a] ut bases suæ ellipticæ, [b] hoc est ut B Kq, B Lq, B Mq, B Nq, [c] hoc est ut axes B K, B L, B M, B N, [d] hoc est rursus juxta hypothesin primæ hujus; [e] quare segm $\frac{BPQA}{2} \sqsubset \psi$, [f] hoc est $\frac{3}{2}$ segmenti conici B V A $\sqsubset \psi$; quod ostensis repugnat: Sin dicatur port B V A $\sqsupset \frac{3}{2}$ segm B V A, itidem consequetur absurda contradictio, sicut in præcedenti. Ergo potiùs est port B V A sesquialtera segmenti conici B V A. *Q. E. D.*

[a] *sch.* 11 *huj.*
[b] *cor,* 7. *huj.*
[c] 20. 1 *Apol.*
[d] *constr.*
[e] 1 *hujus.*
[f] 11 *hujus.*

Hinc quoque facilè reperiatur segmentum conicum aut cylindricum (vel etiam conus, & cylindrus) æquale ejusmodi portioni.

Prop. XXVIII.

Fig. 145. *Si conoidis parabolici duæ portiones* (B V A, S D G) *resecentur planis, altera quidem* (B V A) *recto ad axem, altera verò* (S D G) *obliquo, sint verò portionum axes* (V K, D E) *æquales; portiones erunt æquales.*

a 12 hujus. A. b hyp. c cor 4. hujus. d 7. 5. e 4. 6. f 1. 6. g 13 hujus. h 6 hujus. k 11. 5. l sch. 11 huj. m 26 & 27 h. & 15. 5.

Secetur conis plano per axem ad planum SG recto, [a] faciente sectiones BVA, SDG; quarum diametri VK, DE; connectantur autem V B, V A, & DS, DE; & ducantur GL ad DE (protractum) & D P ad S G perpendicularis. & propter DE [b] = VK, [c] est G L = AK. [d] unde GE. G L) ([e] hoc est D E, D P, [d] vel V K, D P) :: G E. A K [f] :: G E × A K. A Kq. [g] Sunt verò G E, & G L, vel A K semiaxes ellipsis, quæ basis est portionis S D G; [h] adeóque G E × A K ad A Kq, ut hæc ellipsis ad circulum radio A K. ergo ut altitudo V K ad altitudinem D P, [k] ita est reciprocè basis segmenti conici S D G ad conum B V A. [l] ergo conus B V A segmento conico S D G æquatur, [m] & ideo portio B V A portioni S D G. *Q.E.D.*

Proop. XXIX.

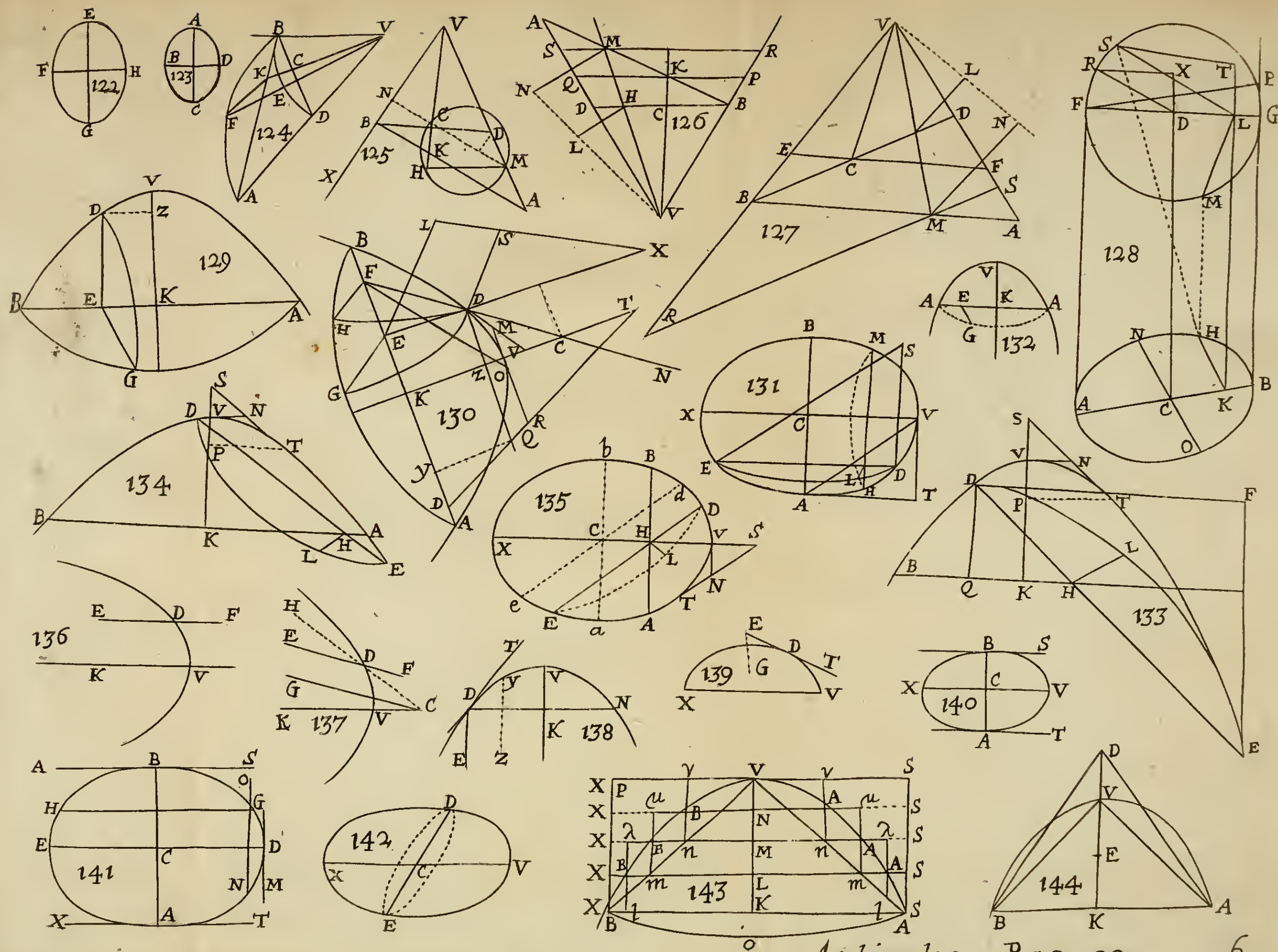
Fig. 146. *Si conoidis Parabolici duæ portiones resecentur planis, quomodocunque ductis, portiones ad se mutuò rationem habebunt eandem, quàm quadrata axium suorum.*

a 28 hujus. b 15. 5. & 26 27 hujus. c schol 15. 12. d 2. 12. e 21. 1 Apol. f 23. 6. g conss. & 7. 5.

Per axem conoidis ducatur planum, quod efficiat sectionem; in cujus axe sumanrur à vertice rectæ V K, V Z datarum portionum axibus æquales, & ducantur B A, X Y ad V K perpendiculares: [a] sunt igitur portiones B V A, X V Y æquales datis; hæ verò se habent invicem [b] ut coni B V A, X V Y, [c] hoc est in composita ratione basium & altitudinum, hoc est in ratione composita ex rationibus [d] B Kq ad X Zq, & V K ad V Z; [e] hoc est composita ex rationibus V K ad V Z, & VK ad VZ; hoc est, [f] ut V Kq ad V Z q, [g] hoc est ut quadrata axium datarum portionum. *Q.E.D.*

Prop. XXX.

Fig. 147. *Omnis hyperbolici conoidis portio* (B V A) *resecta plano* (B O A) *recto ad axem, ad conum* (B V A) *habentem basim eandem cum portione, & æqualem altitudinem, hanc habet rationem, quam habet æqualis* (K Y) *& axi* (V K) *portionis, & triplæ* (V Y) *axi accedentis* (V C)


122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144

(V C) *ad æqualem* (X T) *utrique & axi portionis, & duplæ* (V T) *accedentis axi.*

Sit aliquod Z. con B V A :: K Y. K T ; & ſi fieri poteſt ſit pri- a 24 *hujus.*
mò Z ⊐ port B V A. [a]Portioni circumſcribantur & inſcribantur
figuræ (quæ dicantur φ, & ψ) utraque conſtans cylindris, juxta 24
hujus, ita ut ſit φ — ψ ⊐ port B V A — Z ; *adeóque Z ⊐ ψ ; ſunt
autem cylindri B κ, B λ, B μ, B ν ad ſe, [b]ut baſes, [c]hoc eſt ut B Kq, b 11. 12.
B Lq, B Mq, B Nq, [d] hoc eſt ut rectangula T K V, T L V, T M V, c 2. 12.
T N V, ([e]hoc eſt ut T V + VK × VK ; T V + V L × V L, T V d 21. *1 Apol.*
+ V M × V M, T V + V N × V N) [f]hoc eſt juxta hypotheſin ter- e 1. 6.
tiæ hujus ; ergo [g]cylindrus B Q (æqualis ſummæ maximorum B κ) f *conſt.*
ad figuram inſcriptam ψ (æqualem ſummæ inæqualium cylindrorum g 2 *hujus.*
dempto maximo) ſe habet, ut rectangula totidem æqualia maximo h 3 *hujm.*
T K V ad inæqualia rectangula T L V, T M V, T N V, [h]hoc eſt in k 15. 5.
majore ratione quàm K T ad $\frac{1}{3}$ K V + $\frac{1}{2}$ V T, hoc eſt in majore ra- l *conſt.*
tione quàm cylindrus B Q ad Z (nam eſt $\frac{KT}{3}$. $\frac{KV}{3}$ + V C [k] :: (KT. m *conſt. & cor.* 4. 5.
K V + 3 V C [l] :: K T. K Y [m] :: con B V A. Z [n] ::) cyl $\frac{BQ}{3}$. Z ; [o]a- n 10. 12.
deóque K T. $\frac{KV}{3}$. + V C :: cyl B Q. Z) [p]ergo ψ ⊐ Z ; quod re- * o
pugnat prius oſtenſis. Sin dicatur Z ⊏ port B V A ; [q]fiat φ — ψ p 10. 5.
⊐ Z — port B V A, *adeóque φ ⊐ Z ; & quia cyl B Q. φ [r] ⊐ KT. q 24 *hujus.*
$\frac{1}{3}$ K V + $\frac{1}{2}$ V T [s] :: cyl B Q. Z ; [t]erit φ ⊏ Z quod itidem repug- r 3 *hujus.*
nat. ergo potius eſt Z = port B V A. *Q.E.D.* s *prius.* t 10. 5.

Schol.

Hinc facilè reperitur conus æqualis datæ hyperbolici conoidis portioni (B V A).

Fiat K V + 2 V C. K V + 3 V C :: K V. K D. Eſtque con B D A. con B V A :: K D. K V :: K V + 3 V C. K V + 2 V C :: port B V A. con B V A. unde con B D A = port B V A. Fig. 148.

Schol.

Indiviſibilium methodo faciliùs tranſigitur hoc negotium.

Sint

Sint $VN = a$. $VK = A$. eſt

a 12. I Apoll.

$$BNq^{\alpha} = ra + \frac{r}{t}aa$$

$$BMq^{\alpha} = 2ra + \frac{r}{t}4aa$$

$$BLq^{\alpha} = 3ra + \frac{r}{t}9aa$$

$$BKq^{\alpha} = RA + \frac{R}{T}Aq.$$

β ſchol. 1 huj. *γ ſch. 10. de helic.*

Summa $^{\beta}\frac{RAA}{2} + ^{\gamma}\frac{R}{T}\frac{AAA}{3}$

*hoc eſt $\frac{\varpi}{\delta}$ ×: BKq×VK. δ 10. 12. ζ 15. 5.

Ergo ſumma circulorum B A, eſt $\frac{\varpi}{\delta}\times : \frac{RAA}{2} + \frac{R}{T}\frac{A^3}{3}$. At conus B V A $^{\delta}$eſt $*\frac{\varpi}{\delta}\times : \frac{RAA}{3} + \frac{R}{T}\frac{AAA}{3}$. Horum verò $^{\zeta}$eadem eſt ratio quæ $\frac{3T}{2} + A$ ad $T + A$ (quod patet iſtas ſummas multiplicando per $3T$ & dividendo per RAA). Et hoc, opinor, modo *Archimedes* hanc proportionem adinvenit.

Prop. XXXI.

Quinimò ſi non recto ad axem plano reſecetur portio hyperbolici conoidis, ad ſegmentum coni, baſin habentis eandem cum portione, eundèmque axem, hanc habebit rationem, quam æqualis utrique, axi nempe portionis cum tripla accedentis axi, ad æqualem ambabus, axi nempe & duplæ accedentis axi.

Probatur ut antecedens, niſi quòd pro circulis hîc ellipſes habeantur. Confer Propoſ. 27.

Prop. XXXII.

Fig. 149.

Omnis figuræ ſphæroideos plano reſectæ per centrum (K) *recto ad axem* (V T) *dimidium* (B V A) *duplum eſt coni* B V A) *baſin habentis eandem cum portione, & eundem axem.*

a 24 hujus. *b ut in priorib.*

Si fieri poteſt ſit 2 con B V A ⊐ port B V A ; portioni [a]circumſcribantur & inſcribantur figuræ (quas pro more voco φ & ψ) ita ut ſit φ — ψ ⊐ port B V A — 2 con B V A ; [b]ac ideo 2 con B V A ⊐ Ψ.

Sunt

Sunt autem cylindri Bκ, Bλ, Bμ, Bν ad se [c] ut B Kq, B Lq, B Mq, B Nq, [d] hoc est ut rectangula T K V, T L V, T M V, T N V, [e] hoc est ut V Kq, V Kq—KLq, V Kq—K Nq, V Kq—K Nq; ergo cylindrus BQ [b] (æqualis summæ cylindricorum æqualium maximo Bκ) ad figuram ⫝ [b] (æqualem summæ inæqualium dempto maximo) [c] se habet ut totidem V Kq, ad reliqua V Kq—V Lq, V Kq—V Mq, V Kq —V Nq, [g] hoc est in majori ratione quam tot V Kq ad V K q, VKq— V Lq, V Kq—V Mq, V Kq—V Nq, [g] hoc est in majori ratione quàm tot V Kq ad tot V Kq—$\frac{1}{3}$ V Kq (quia $\frac{\text{tot V Kq}}{3}$ [h] ⊏ V Lq + V Mq + V Nq) hoc est quàm tot V Kq ad tot $\frac{2}{3}$ V Kq, hoc est quàm 3 ad 2, [k] hoc est quàm cylindrus B Q ad duplum coni B V A. [l] unde fig ⫝ ⊐ 2 con B V A. verùm erat 2 con B V A ⊐ ⫝, quæ repugnant.

c 11. 12. d 21. 1 *Apol.* e 5. 2. f 2 *hujus.* g 8. 10. h 2 *cor.* 10 *de helic.* k 10. 12. l 10. 5.

Quòd si dicatur 2 con B V A ⊏ por B V A; [m] fiat φ—⫝ ⊐ 2 con B V A—port B V A; adeóque φ ⊐ 2 con B V A. verùm contra, priorem discursum invertendo, [n] patet esse 2 con B V A ad cylindrum B Q in minori ratione quàm V Kq, V Kq—V Lq, V Kq—V Mq, V Kq—V Nq ad tot VKq, [o] hoc est quàm figura φ ad cylindrum BQ, [p] adeóque esse 2 con B V A ⊐ φ, quod repugnat. Quin potiùs ergo est port B V A = 2 con B V A. *Q.E.D.*

m 24 *hujus.* n 26. 5. o *priùs, &* 2 *h.* p 10. 5.

Per indivisibilia: sit V N = *a*, V K = A.

$$B\,Nq \overset{\alpha}{=} ra - \frac{r}{t}aa.$$

$$BMq \overset{\alpha}{=} 2ra - \frac{r}{t}4aa.$$

$$BLq \overset{\alpha}{=} 3ra - \frac{r}{t}9aa.$$

$$B\,Kq \overset{\alpha}{=} RA - \frac{R}{T}AA.$$

α 13. 1 *Apol.*

[β] Summa est $\frac{RAA}{2} \overset{\gamma}{-} \frac{R}{T}\frac{AAA}{3}$. & summa circulorum B A est $\frac{\varpi}{\delta}$: $\frac{RAA}{2} - \frac{R}{T}\frac{A^3}{3}$. At verò conus B V A [δ] est $\frac{\varpi}{\delta}$: $\frac{RAA}{3} - \frac{R}{T}\frac{A^3}{3}$ δ (quia B Kq [ζ] = R A + $\frac{R}{T}$AA). ergo cùm ista summa [θ] sit ad hanc ut $\frac{3}{2}$ F — A ad T—A (ut patet utramque ducendo in T, & dividendo per RAA)

β 1 *hujus.* γ *sch.* 10. *helic.* δ 10. 11. ζ 13. 1 *Apol.* θ 15. 5.

λ *hyp.* μ 11. 5. RAA) hoc eſt in præſente caſu ut 2 ad 1) λ quia $\frac{T}{2} = A$) μ erit portio B V A ad conum B V A, ut 2 ad 1.

Prop. XXXIII.

Quinetiam ſi ſphæroides plano non recto ad axem per centrum ſecetur, ſimiliter dimidium ſphæroidis duplum erit ſegmenti coni baſin habentis eandem cum portione, eundemque axem.

Non abludit demonſtratio ab illa præcedentis: confer propoſ. 27 & 31.

Prop. XXXIV.

Fig. 149. *Omnis figuræ ſphæroidis* (B V A T) *plano ſectæ recto ad axem* (VT) *non per centrum* (C) *portio minor ad conum* (B V A) *baſin habenti eandem cum portione, & axem eundem* (V K) *hanc habet rationem, quàm utraque* (V C + K T) *& ſemiſſis axis ſphæroidis, & axis majoris portionis ad axem* (T K) *majoris portionis.*

Vides in præcedente ſecundùm indiviſibilia proceſſu, qui generalis eſt, & ad quaſlibet portiones (etiam hemiſphæroide majores) æquè ſpectat, eſſe portionem B V A ad conum B V A, ut $\frac{3T}{2}$ — A ad T-A, hoc eſt ut V C + K T ad K T. *Q.E.D.*

Sin *Archimedis* ſtrictiorem diſcurſum aves cognoſcere; ſit aliquod Z. con B V A :: V C + K T. K T. & ſi fieri poteſt, ſit primò port B V A ⊏ Z. Portioni verò B V A [d] rurſus circumſcribantur figuræ φ,

d 24 *hujus.* e *ut in præced.* f 2 *hujus.*

Ψ, ita ut φ — Ψ ⊐ port B V A — Z; ac [b] inde Z ⊐ Ψ. Sunt verò cylindri B κ, B λ, B μ, B ν ad ſe [e] ut rectangula BKV, B L V, B M V, B N V; adeóque cylindrus B Q ad inſcriptam figuram Ψ, [f] ut tot rectangula T K V ad rectangula T L V, T M V, T N V.

Eſt verò
$$\begin{cases} TK \times KV^* = TL \times LV + 2CK \times KL + KLq. \\ TK \times KV^* = TM \times MV + 2CK \times KM + KMq. \\ TK \times KV^* = TN \times NV + 2CK \times KN + KNq. \\ TK \times KV^* = TK \times KV = 2CK \times KV + KVq. \end{cases}$$

g 5. 2. h 4. 2. *Nam exceſſus rectangulorum T K V, T L V [g] eſt C Lq — CKq [h] = CKq + 2 C K × KL + KLq — CKq = 2CK + KL + KLq &c.

Se

Se verò habet summa juxta 3^{am} hujus; $\left\{\begin{array}{l} 2CK \times KL + KLq. \\ 2CK \times KM + KMq. \\ 2CK \times KN + KNq. \\ 2CK \times KV + KVq. \end{array}\right\}$ k 3 *hujus.*
[k]adeóq; tot æqualia maximo $2CK \times KV$
$+ KVq$ ad omnia inæqualia se habent
in minori ratione, quàm $2CK + KV$ ad
$CK + \frac{1}{3}KV$, hoc est quàm KT ad $CK + \frac{1}{3}KV$. [l]ergo per con- l 26. 5.
versionem rationis tot æqualia maximo sunt ad seipsa demptis his in-
æqualibus (hoc est omnia rectangula TKV ad ipsa TLV, TMV,
TNV) in majori ratione, quàm KT ad KT dempto $CK +$
$\frac{KV}{3}$; hoc est quàm KT ad $CV - \frac{KV}{3}$. [m]ergo cyl $BQ.\Psi \sqsubset KT, CV -$ m 10. 5.
$\frac{KV}{3}$. Est verò cyl $BQ.Z$ [n]:: 3 con $BVA.Z$ [o]:: $3KT.VC + KT$ n 10. 12. o *hyp.*
$:: KT.VC + \frac{KV}{3}$ (nam $VC + KT = 3VC - VK$). [m]ergo Ψ
$\sqsupset Z$, contrà quàm priùs evictum est.

Quòd si dicatur esse $Z \sqsubset$ port BVA, fiat $\varphi - \Psi$ [p]$\sqsupset Z -$ port p 24 *hujus.*
BVA, ac ideo $\varphi \sqsupset Z$. Jam (ostensis insistendo) est cyl BQ ad fi-
guram circumscriptam φ, [q]ut tot rectangula TKV (quot sunt cylin- q *ut in præc.*
dri $B\times$ in BQ) ad rectangula TKV, TLV, TMV, TNV. verùm
tot rectangula TKV ([r]hoc est tot $2CK \times KV + KVq$) ad summam r *priùs.*
$\left\{\begin{array}{l} 2CK \times KL + KLq \\ 2CK \times KM + KMq \\ 2CK \times KN + KNq \end{array}\right\}$ [s]se habent in majori ratione quàm $2CK$ s 3 *hujus.*
$+ KV$ ([r]vel KT) ad $CK + \frac{1}{3}KV$. &
ideo dicta rectangula TKV ad seipsa demptâ
hac summâ ([r]hoc est ad rectangula TKV, TLV, TMV, TNV)
[t]in minori ratione erunt quàm KT ad $CV - \frac{KV}{3}$, [r]hoc est quàm cyl t 26. 5.
BQ ad Z. [u]quare cyl $BQ.\varphi \sqsupset$ cyl $BQ.Z$. quare $\varphi \sqsubset Z$. quod u 10. 5.
iterum repugnat. ergo potiùs est $Z =$ port BVA. *Q.E.D.*

Prop. XXXV.

Quinetiam si sphæroides plano non recto ad axem secetur, neque per centrum, minor ejus portio ad segmentum coni basin habentis eandem cum portione axemque eundem hanc rationem habebit, quam simul ultraque & dimidia ejus, quæ connectit vertices factarum portionum, & axis majoris portionis ad axem majoris portionis.

Rursus est port BVA ad conum BVA, ut $VC + KT$ ad KT. Simili modo demonstratur, ut præcedens, adhibendo ellipses pro circulis, ut in 27 hujus; quare tædio parcimus.

Prop. XXXVI.

Fig. 151. *Cujuscunque figuræ sphæroideos* (B V A T) *plano sectæ recto ad axem major portio* (B T A) *ad conum* (B T A) *habentem eandem cum portione basin, & eundem axem* (T K), *hanc habet rationem, quam æqualis* (G K) *ambabus simul & dimidio* (C V) *axis sphæroidis, & minoris portionis axi* (K V) *habet ad axem* (K V) *minoris portionis.*

Agatur planum D E per centrum; & compleantur coni B V A, D V E: Sint verò T F = T C; & V K. V C :: V C. V X. Estque
a *sch* 12. jam con D V E con B V A.[a] = (V C. V K + D Cq. B Kq = V C.
b 21. *I A. ol.* V K +[b] V Cq. T K × K V[c] = V X. V C + V Cq. T K × K V[d] =
c *const.* V X × V C . V Cq + V Cq. T K × K V[e] =) V X × V C. T K ×
d 1. 6. K V. item con B V A. port B V A[f] :: T K. K F[d] :: T K × K V. K F ×
e 20. *def.* 5. K V. ergò ex æquo est con D V E. port B V A :: V X × V C. K F
f 34 *huj.* × K V. & antecedentes quadruplando [g]sphærois D V E. port B V A
g 32 *hujus.* :: [h]V X × G F. K F × K V. & dividendo port B T A. port B V A ::
h *constr.* & 1. 6. V X × G F—K F × K V. K F × K V (hoc [k]est) :: V X × G K + K X
k 7. 5. × K F. K F × K V. (nam est V X × G F[l] = V X × G K + V X ×
l 1. 2. K F = V X × G K + [l]K V × K F + K X × K F; adeóque V X × G F—K F × K V = V X × G X + K X × K F). Item est port B V A. con B V A[f] :: F K. T K. [l]:: K F × K V . T K × K V; & con B V A.
m 11. 12. con B T A[m] :: K V. T K :: T K × K V. T Kq. ergo rursus ex æquo
n *const.* est port B T A. con B T A :: V X × G K + K X × K F. T Kq. Quo-
o 19. 5. niam verò est V X. V C[n] :: V C . V K :: [o]V X—V C. V C—V K (hoc est) :: C X. K C. & componendo V C + V K. V K :: K X. K C; hoc est G K. V K ([l]vel V X × G K. V X × V K) :: K X. K C
p 12. 5. ([l]vel K X × K F. K C × K F). & [p]proinde G K. V K :: V X × G K +
q 17. 6. K X × K F. V X × V K + K C × K F. est vero demùm V X × V K +
r *cor.* 5. 2. K C × K F[q] = V Cq + K C × K F = V Cq +: T K—V C ×: T K
s 7. 5. + V C[r] = V Cq +: T Kq—V Cq = T Kq. [s]ergo G K. V K ::
t *priùs.* (V X × G K + K X × K F. T Kq [t]::) port B T A. con B V A. *Q. E D.*

Hujusce discursûs tædium qui voluerit declinare, per generalem propos. 34æ discursum sibi patiatur satisfieri.

Prop.

Prop. XXVII.

Quinetiam si sphæroides (B V A T) *secetur plano non recto ad axem, neque per centrum, major ejus portio* (B T A) *ad segmentum coni basin habentis eandem cum portione, & eundem axem, hanc habebit rationem, quam utraque simul* (K G) *æqualis nempe dimidiæ* (C V) *vertices connectentis factarum portionum, & axi* (K V) *minoris portionis, ad axem minoris portionis.*

Eodem fere modo demonstratur quo antecedens, pauculis, quæ res ipsa sponte suggeret, immutatis.

Coroll.

Ex his facilè reperiatur conus cuilibet datæ sphæroidis portioni (B V A) æqualis. Fig. 152.

Fiat nempe K T. V C + K T :: K V. K D. & compleantur coni B V A. B D A; éstque con B V A. con B D A [a]:: K V. K D [b]:: K T. V C + K T [c]:: con B V A. port B V A. [d]ergo con B D A = port B V A. *Q. E. F.*

a 11. 12.
b *const.*
c 34. 35, 36, 37 *hujus.*
d 9. 5.

His subjiciemus ea, quæ è dictis consectari subinnuit *Archimedes* in præloquio ad hunc librum suo.

Prop. XXXVIII.

Similes sphæroideon & conoideon portiones (B V A, D X F) *triplicatam inter se rationem habent axium suorum* (V K, X L). Fig. 153. Fig. 154.

Sint C, E centra figurarum, & T, S axium extrema; & [a] quia est K B. K V :: L D. L X; [b] liquet conos B V A, D X F esse similes, [c]adeóque triplicatam habere rationem diametrorum, vel axium V K, X L, (unde statim patet portiones B V A, D X F, si parabolicæ fuerint, habere quoque triplicatam eorundem axium rationem; in reliquis autem) ob figurarum similitudinem [e]ipsarum latera proportionalia sunt, [f]hoc est T K × K V. K Bq :: S L × L X. L Dq. ergo ex æquo est T K × K V. K Vq :: S L × L X. L Xq. [g] hoc est T K. V K :: S L. L X. & per conversionem rationis T K. T V :: S L. S X. adeóque T K. C V [*] :: S L. E X. & componendo T K. T K + C V :: S L. S L + E X [k]hoc est con B V A. port B V A :: con D X F. port D X F. ergo permutando con B V A. con D X F :: port B V A. port B X F.

a *hyp.* & 9 *def. hujus.*
b 24. *def.* 11.
c 12. 12.
d 26, 27 *hujus,* & 15. 5.
e *hyp.* & 5. 8. *hujus.*
f 21. *1 Apoll.*
g 1. 6. & 11. 5.
k 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, *hujus.*

111.5. B X F. [l]ergo portiones B V A, D X F triplicatam quoque rationem habent axium V K, S L. *Q.E.D.*

Coroll. Hinc similes integræ figuræ sphæroides triplicatam axium rationem habent.

Nam ex hoc generali discursu ipsarum dimidiæ portiones ita se habent.

Prop. XXXIX.

Fig. 155. Fig. 156. *In sphæroidibus figuris æqualibus* (B V A T, D X F S) *quadrata è diametris* (B A, D F) *proportione reciprocantur axibus; &, si quadrata diametrorum reciprocentur axibus, æqualia sunt sphæroidea.*

a 32. *hujus.* b 15. 12. c 15. 5. Si sphæroides æquales ponantur, erunt ipsarum [a]subquadrupli coni B V A, D X F æquales; [b]adeóque erit B A q. D F q :: E X. C V [c]:: S X. T V. *Q.E.D.*

Sin ponatur esse S T. T V ([c]hoc est E X. C V) :: B Aq. DFq. [b]erunt ideo coni B V A, D X F pares; ac adeò horum [d]quadruplæ sphæroides æquabuntur. *Q.E.D.*

Prop. XL.

Fig. 157. Fig. 158. *A data sphæroidis aut conoidis portione* (B V A) *portionem abscindere plano ad datum planum parallelo, ita ut abscissa portio æquetur dato cono* (Z X Y).

Not. XP est altitudo coni, & Z Y diameter basis, Z P radius.

1. In parabolico conoide sit V K axis, & sectionis per axem parameter R; fiat verò 3 R. Z P :: Z P. G. & inter X P ac G reperiatur media proportionalis, cui æquetur V K; & per K ducatur planum B A axi rectum, erit portio B V A æqualis dato cono. Nam

a 26 *hujus.* fiat K Q = $\frac{3}{2}$ V K. [a]ergo conus B Q A æquatur portioni B V A. Est

b 7. 5. verò Q K. X P [b]:: $\frac{3}{2}$ V K. X P [c] $\frac{3}{2}$ G. V K [d]:: $\frac{3}{2}$ R G. R × V K [e]::

c *const.* & * d 1. 6. Z Pq. R × V K [f]:: Z Pq. B Kq. [g]:: Q K. X P. ergo conus B Q A

e *const.* & 7. 6. æquatur cono Z X Y. adeóque portio B V A cono Z X Y æquatur.

f 11. 1 *Apol.* Itaque si dato plano parallela ducatur D N tangens sectionem B V A

g 11. 5. in D; & ducatur diameter D E = V K; & per E ducatur planum

l *sch. ad fin. ult.* 2 *Apoll.* S G ad D N parallelum; [k] liquet absolvi propositum.

k 28 *hujus.* 2. In sphæroide, & conoide hyperbolico problema solidum est, cujus analysin subjungam. V T est axis. B A ad V T perpendicularis.

Analysis.

Analysis.

In sphæroide sit V T $= t$. parameter V R $= r$. X P $= m$. Z P $= n$. conus B Q A = port B V A. K V $= a$. unde BKq $= ra - \frac{r}{t} aa$. K V. K Q :: $t - a. \frac{3}{2} t - a :: a. \frac{3ta - 2aa}{2t - 2a} =$ K Q.

Ob portionem BVA = con BQA.

X P. Q K :: B Kq. Z Pq (ob con B Q A = con Z X Y) $m. \frac{3ta - 2aa}{2t - 2a} :: \frac{rta - raa}{t}. nn.$ ergo fit æquatio $2ra^4 - 5tra^3 + 3ttraa + 2tmnna - 2ttmnn = 0$. Ponatur $r = n$. erit $a^4 - \frac{5}{2} ta^3 + \frac{3}{2} ttaa + tmna - ttmn = 0$. Ista veró æquatio dividitur per $a - t$, & fit $a^3 - \frac{3}{2} taa + tmn = 0$. vel $tmn = \frac{3}{2} taa - a^3$.

Ejusmodi veró Problemata generalibus ex methodis optimè conficiuntur.

Addenda

Addenda locis infrà citatis.

[*Post Prop. IV.*] *Schol.*

ARchimedeæ doctrinæ complendæ subjiciemus antecedenti suppar circa reliquas sectiones conicas theorema.

Fig. 160. Fig. 161. *Si ab eadem hyperbola, vel ellipse quomodocunque resecentur duæ portiones* (B V A, S D G), *quarum à verticibus ad bases interceptæ diametri* (V K, D E) *semidiametris* (C V, C D) *proportionales sint, tam ipsæ portiones, quàm iis insceipta triangula æquabuntur.*

Sit primùm altera diameter V K sectionis axis; & sint C F, C H semidiametri ipsis C V, C D conjugatæ; sectionem verò tangant rectæ (per vertices V, D ductâ) V M, D N concurrentes in M; & per V ducatur L I K tangenti D N (ac ipsis proinde C H E ω) perpendicularis. Demùm ducantur D P ad M V, & M Y ad V K parallelæ. Et quia rectangula triangula M Y D, V M X similia sunt; est Y M. V X (VP. V X) :: D M. M V [a] :: C H. C F. verùm ratio V P ad V X componitur è rationibus V P ad V N, & V N ad VX, [b] hoc est è rationibus CV ad C N, & C N ad X L; è quibus iisdem componitur ratio C V ad X L. ergo est C H. C F :: C V. X L. atqui per hypothesin est C V.V K :: C D. D E (hoc est) :: L X. X I; permutandóque C V. L X :: V K. X I. [c] ergo C H. C F :: V K. X I; hoc est E S. K B :: V K. X I; unde patet inscripta triangula B V A, S D G æquari; sed & hinc ipsas portiones constabit è sequenti theoremate: unde colligetur (prorsus eodem modo sicut in hac *Prop.* 4.) universim præstitutâ conditione præditas portiones sibimet æquari.

a cor. 16. 3. Apol.
b cor. 36. 1 Apol. & 2. 6 elem.
c coroll. infr.

Fig. 162. 163. Sint duæ quælibet portiones ellipticæ vel hyperbolicæ B V A, S D G. quarum interceptæ diametri V K, D E semidiametris V T, D O proportionales sint, & altitudines (V K, X L) basibus (B A, S G) reciprocè proportionentur (V K. X L :: S G. B A): istæ portiones æquales erunt.

Diametri V K, D E similiter utcunque dividantur in punctis Y, P; per quæ ducantur rectæ Z φ basi B A; & rectæ Q R basi S G parallelæ: item per puncta Z, φ ducantur rectæ Z H, φ F ad diametrum

trum V T ; & Q I , R K ad diametrum D E parallelæ. Et quia C V. V K [a]:: C D. D E. [b]erit C V. C K :: C D. C E. & ideo C Vq. C Vq—C Kq :: C Dq. C Dq—C Eq. [c] hoc est C Vq. T K × K V :: C Dq. O E × E D. Item simili ratione, quia C V. V K [a]:: C D. D E . & V K. V Y [d] :: D E. D P ; adeóque ex æquo C V. VY :: C D. D P ; erit C Vq. T Y × Y V :: C Dq. O P × P D ; & permutando T Y × Y V. O P × P D :: C Vq. C Dq :: T K × K V. O E × E D. Et rursus permutando T K × K V. T Y × Y V :: O E × E D. O P × P D ; [e]hoc est B Aq. Z φq :: S G q. Q Rq ; & B A. Z φ :: S G. Q R ; adeóque permutando B A. S G :: Z φ. Q R. Cùm igitur sit B A. S G [a]:: X L. V K ; [f]erit Z φ. Q R :: X L. V K. Est verò X L, N L [g] :: D E. P E [d] :: V K. Y K ; & permutando X L. V K :: N L. Y K, [f]ergo Z φ. Q R :: N L. Y K. [h] unde parallelogramma Z H F φ, Q I K R æquantur ; quod cùm omnibus ejusmodi parallelogrammis (utrique portioni inscriptis aut circumscriptis) conveniat, satis perspicuum est ipsas portiones B V A, S D G æquari.

a *hyp.* b *cor.* 19. 5. c 5. 2. d *const.* e 21. 1 *Apol.* f 11. 5. g 2. 6. h 16. 6.

Hanc propositionem *Vinc. Viviani* primus, opinor, detexit, nec ideo laude suâ fraudandus : hæc autem demonstratio de penu nostro. *in fig. præced.*

Coroll. |B A. S G| :: C F. C H :: Z φ. Q R.
|B A. S G| :: V M. D M.

[*Ad Prop.* X X X I I I.]

Schol.

Si conoidis hyperbolici duæ portiones (B V A, S D G) *resecentur, quarum axes* (V K, D E) *accedentibus axi* (C V, C D) *proportionales sint,, ipsæ portiones æquales erunt.* Fig. 164.

Sit primùm axium alter V K basi rectus ; secetur autem conois plano per axem ad planum S G recto faciente hyperbolen, in qua portiones B V A, S D G, quarum diametri V K. D E. tangant verò sectionem rectæ V M, D M ; & sit D P ad S G perpendicularis. Et quoniam est C V. V K [b] :: C D. D E. [c] erit D M. M V :: G S. A B. [d]ergo A B est alter axis ellipsis, quæ basis est portionis S D G. Item est D P. V K [c]:: B A. S G [e] :: B Aq. B A × S G [f] :: ⊙ B Aq. ellips. B A. S G. [g]ergo segmenta conica B V A, S D G æquantur. Cùm igitur sit port. B V A. segm. con. B V A [h]:: 3 C V + V K. 2 C V + V K

a 12 *hujus* A. b *hyp.* c *cor. sch.* 4 *h.* d *cor.* 14 *huj.* e 1. 6. f 6 *hujus.* g *sch.* 11 *h.* h 30 *hujus.*

l 31 *huj.* VK[k] :: 3CD + DE. 2CD + DE[l] :: port SDG. segm con
k *not. infra.* SDG. [l]ergo quoque portiones BVA, SDG æquantur.
l 14. 5. *Not.* (Quia CV. VK :: CD. DE. est 3CV. VK[m] :: 3CD.
m 15. 5. DE. & componendo 3CV + VK. VK :: 3CD + DE. DE. & permutando 3CV + VK. 3CD + DE :: VK. DE. Simili pro-
n 11. 5. cessu est 2CV + VK. 2CD + DE :: VK. DE. [n]quare 3CV + VK. 3CD + DE :: 2CV + VK. 2CD + DE. & permutando.)

Hinc universim, positâ conditione præditæ portiones æquantur: æquantur enim omnes portioni rectæ BVA. ergo inter se.

[*Ad Prop. XXXVII.*]

Schol.

Fig. 165. *Si Sphæroidis duæ portiones* (BVA, SDG) *resecentur, quarum axes* (VK, DE) *axibus integris, vel semiaxibus* (VC, DC) *proportionales sint, æquales erunt portiones.*

Omnino tali discursu probatur, quali theorema Scholii prop. 33. tantùm loco cor. prop. 14. adhibetur coroll. prop. 15 hujus. Quid plura?

145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165



De Planorum Æquilibriis, *SIVE* Centra Gravitatum in Planis.

Libra, *generaliter accepta, aliàs* Latinis *Statera, trutina, lanx, bilanx*; Græcis ζυγὸς *&* ζυγὰ; τάλαντον *&* τάλαντα; σταθμὸς, σταθμίον, *&* σταθμία; πλάστιγγες, τρυτάνη) *est machina, vel instrumentum magnitudinum, mediante pondere per ipsum explorato, quantitatibus dimetiendis & dignoscendis comparatum; juxtáque Mathematicam abstractionem, & simplicitatem considerata, nil aliud est, quàm linea quædam recta, indefinitè utrinque protensa, in qua punctum aliquod, immobili sustentaculo fultum, instarque centri fixum persistit (centri proinde nomine donatum) dum lineæ circa ipsum pars utraque ponderis ubivis incumbentis, aut appensi nisu, premitur aut attrahitur; ita quidem ut prævalens grave partes, quibus annectitur, deprimat, adversasque consequenter elevet; ast si contranitentia gravia paribus certent efficaciis, tota situm conservet, & in æquilibrio perseveret. Satis verò constat, experientiâ suffragante, ponderum in libra vires (sicut & potentias motivas in vecte, similibusque machinis) à duabus omnino causis dependere; ab ipsius scilicet absoluto pondere, vel ab ipsa magnitudinis (intra certam aliquam physicam speciem consistendo) quantitate) & ex ejus à centro distantia. Nam & majus pondus ad eandem distantiam, & æquale pondus ad eandem distantiam gravitandi efficaciâ præpollere compertum est. Verùm ad posteriorem causam attendendo, quâ propter ipsam exactâ ratione crescant aut minuantur vires, haud ita facilè discernatur aut demonstretur à prio-* Fig. 166.

 ri.

ri. Sanè quòd æqualium ponderum vires eâdem cum diſtantiis ſuis proportione juſtè creſcant, alterum eſt è præcipuis totius Staticæ, quam habemus, & totius Mochlicæ (totiuſque proinde Mechanicæ) fundamentis; cui tamen an ſola Geometria, vulgaribus utens poſtulatis & hypotheſibus aſtruendo ſufficiat, equidem non leves ſunt cauſæ dubitandi. Non aliud adſumit hujus Author Libelli (rem ſimpliciter & ſummatim exprimendo) huic principio ſtabiliendo, quàm idem (vel æquale) pondus in majore diſtantia magis gravitare, quo conceſſo vix elici poſſe videtur ponderis ejuſdem vires diſtantiis accuratè proportionari: cur enim inde colligatur eâdem potius quàm aliâ quâvis proportione gravitationem iſtam increſcere. Iſthuc nihilominus enititur hic Author, quo ſucceſſu non diſputo (cum brevitati conſulens, tum quia Cenſorem hîc non ago, nec Advocatum, ſed Interpretem). Cæterum an pro genuino Archimedis fœtu ſit agnoſcendus hic libellus, & prorſus idem ſit cum eo, quem τῶν μηχανικῶν nomine inſcriptum aliquoties allegat Archimedes (de quadr. parab. prop. 6. & 10.) cum pluribus de cauſis ambigere liceat, nil tamen admodum refert anxiè diſquirere; talis ſaltem apparet, ut integram ſuam perfectionem vel non adeptus primo fuiſſe, vel poſtea non retinuiſſe videatur. Sunt tamen in eo, quæ tanti parentis indolem aliquatenus ſapiunt, nec Archimedeum planè dedecent acumen. Utcunque perquam utilis eſt, ut qui primò præcipua Statices elementa ſternit, &, quantum forte rei natura fert, confirmat; tum figurarum planarum rectilinearum, centra gravitatum, exquiſitâ ſanè methodo multiſque poſteriorum ratiociniis lucem præferente conſignat. Superficiebus autem gravitatem aſſignare non veretur; quidni, æquè ac quantitatem? idem de lineis dictum intellige.

PO-

Postulata, seu Hypotheses.

Petimus (vel supponimus)

I. *Æ Qualia gravia ab æqualibus longitudinibus (seu distantiis) æquiponderare.*

Schol.

Æqualia gravia, magnitudine, siquidem homogenea sunt; sin specie diversa, saltem absoluto pondere; longitudines autem intelligit à centro libræ (hoc est ab immobili libram sustinenti puncto) ad centra gravitatis appensorum ponderum (vel ad rectas saltem horizonti perpendiculares per dicta centra transeuntes) protensas. Cùm verò de gravitatis centro hîc potissimùm agatur, mirum videatur (videnum id Librum hunc imperfectum & ἀκέφαλον arguat) nullam centri talis definitionem comparere. Inesse gravi cuicunque magnitudini punctum aliquod unum, ejusquam gravis exactè medium, & æqualibus undiquaque momentis stipatum, à quo suspensum vel utcunque sustentatum grave persistet immotum,& ad nullas undicunq; partes vergens aut propendens, à nonnullis postulatur, *alii probare conantur. Illud verò gravitatis centrum appellatur, & à *Pappo* sic definitur: Dicimus autem centrum gravitatis singuli cujusque corporis esse punctum quoddam intus situm, à quo cogitatione suspensum grave quiescit, & delatum conservat eam, quam ab initio habuit, positionem, neutiquam in latione sua circumlatum.

** Lucas Val. post. I.*
vide Pappum l. VIII.
Vide sis infra Schol. Prop.

Sit, ex. gr. sphæra, cujus diameter A B horizonti parâllela, vel obliqua; si concipiatur hæc appendi perpendiculo Z C ad centrum C, perstabit immota; dimissa verò recta procedet*; at si perpendiculo Y D appendatur eadem ad aliud diametri punctum D, gyrationem concipiet circa punctum D, & nunquam consistet, donec punctum C, adeóque tota recta A B perpendiculo Y D protracto coincidat: unde punctum C erit centrum gravitatis sphæræ. (Ita *Pappi* definitionem interpretor, nonnihil à lectione discedens,quam *Commandinus* exhibet; nempe pro ἠμερεῖ φερόμενον, καὶ φυλάσσει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν (quod sensum præfert perobscurum, ut videtur, & perplexum) lego (tantùm unam voculam transponendo) ἠμερεῖ, καὶ φερόμενον φυλάσσει δὲ; forsan verò scripserit *Pappus*, ἠμερεῖ, φερόμενον δὲ; facilè siquidem fuit transcriptori characterem voculæ καὶ, pro charactere quo designa-

Fig. 167.

**Nullâ vertigine circumlata.*

tur δὲ accipere) rei pleniori intelligentiæ quasdam aliorum scriptorum definitiones subjungam.

Lib. de centro grav. solidorum.

Commandinus. Centrum gravitatis uniuscujusque figuræ solidæ est punctum illud intra positum, circa quod undique partes æqualium momentorum consistunt.

Lucas Valerius. Cujuslibet figuræ gravis centrum gravitatis est punctum illud, a quo suspensum grave per se manet partibus quomodocunque circa constitutis.

Stevinus. Gravitatis centrum est ex quo vel solà cogitatione suspensum corpus quemcunque situm dederis, illum retinet.

Idem. Gravitatis centrum est per quod plana quævis ducta corpus in duas partes æquilibres dividunt.

* ῥοπῆς.

Quæ de solidis illi pronunciant, tu superficiebus & lineis applica, debitam observans analogiam; & adde subsequentem *Eutocii* Commentatiunculam: *Archimedes* (inquit) in hoc libellò centrum *propensionis figuræ planæ reputat, à quo suspensa manet horizonti parallela; duorum autem vel plurium planorum centrum propensionis (vel ponderationis) à quo jugum (hoc est *Libra*, vel *Statera*) suspensum horizonti exisit parallelum.

Coroll. 1. Ex his, & axiomate præmisso consectatur, quòd libræ centrum est centrum gravitatis gravis ex æqualibus gravibus ad æquales distantias appensas compositi.

2. Etiam ex hoc axiomate colligitur Gravis cujuscunque multiplex ad eandem vel æqualem distantiam, æquè multiplum habere momentum momenti primo gravi competentis (momentum appellitamus vim gravitandi, situ gravis simul ac absoluto pondere consideratis). Nam singuli gravis æqualis appositio momentum æquale confert. Ergo totius multiplicis momentum aggregabitur è tot æqualibus momentis, quot ipsum partibus æqualibus constat.

Similiter, æquisecto gravi quocunque, momentum ejus (ad æqualem distantiam) æquisecabitur.

3. Sequitur unicum cujusque magnitudinis fore centrum gravitatis.

Aliàs duæ rectæ parallelæ (vel duo plana æquidistantia) magnitudinem in partes æquiponderantes dividerent, hoc est pars toti æquiponderet.

II. Æqualia verò gravia ab inæqualibus distantiis non æquiponderare, sed ad illum grave propendere, quod magis elongatur.

Sch.

Sch. Æquè patet hoc: si gravium æqualium alterum præponderat, illud à libræ centro remotius est.

III. Siquidem, cùm à quibusdam distantiis gravia æquiponderent, alteri gravium adjiciatur aliquid; non æquiponderari, sed ad illud grave propendere, cui quid adjectum est.

Æquè liquet, si gravia à quibusdam distantiis æquiponderet, eorum alterum magis elongatum præponderare, minúsque distans elevari.

IV. Quinetiam similiter, si à gravium (æquiponderantium) altero quippiam auferatur, æquilibrium non fieri, sed ad illud grave inclinari, à quo nil ademptum est.

Æquè clarum est, si gravibus æquiponderantibus adjiciantur vel adimantur æquiponderantia, æquilibrium persistere.

V. Æqualium & similium figurarum planarum invicem congruentium, & centra gravitatum mutuò congruere.

Idem de magnitudinibus aliis (corporibus & lineis) æquè verum & manifestum est.

VI. Inæqualium autem & similium (figurarum) centra gravitatum similiter erunt posita.

Definitio.

VII. Puncta verò similiter poni dicimus ad similes figuras, à quibus ad æquales angulos ductæ rectæ faciunt angulos cum homologis lateribus æquales.

Ex g. In similibus triangulis A B C, D E F, si à punctis Z, Y ducantur ad angulos rectæ; fuerint verò singillatim anguli ad Z æquales angulis ad Y; qui nempe lateribus triangulorum homologis opponuntur. quin & anguli Z A B, Y D E; & Z A C, Y D F, & reliqui reliquis, qui homologis eorundem lateribus adjacent, pares fuerint; similiter poni dicentur hæc puncta Z, Y. Fig. 168. 169.

VIII. Si magnitudines à quibusdam distantiis æquiponderent, & ipsis æquales ab iisdem distantiis æquiponderabunt.

IX. Omnis figuræ, cujus perimeter ad easdem partes est cava, centrum gravitatis intra figuram sit oportet. Fig. 170.

Sit in talis figuræ (A B C) perimetro punctum quodvis B, per quod recta linea, vel planum (I X) figuram contingat; sanè liquet pun-

ctum

Vide defin. ad post. I. ctum B non esse centrum gravitatis figuræ, quia totum pondus ad unas ipsius X T partes jacet ac propendet; multò minùs ex simili causa punctum D, extra figuram situm, erit centrum gravitatis dictæ figuræ. Idem in ipsis lineis ad easdem partes cavis intellige; earum nempe centrum gravitatis nec in ipsis, nec ad ipsarum partes convexas, sed intra cavum existere.

Prop. I.

Conversa I. post. *Quæ ab æqualibus distantiis æquiponderant gravia, sunt æqualia.*

Nam si alterutrum excedat, excessu dempto, residuum alteri exæquabitur, & [a]æquiponderabit; [b]unde tota non æquiponderabunt, adversùs hypothesin. ergo neutrum excedit. *Q.E.D.*

a 1 post. huj.
b 3. post. huj.

Schol. Hoc æquè verum adde: Quæ ab æqualibus distantiis non æquiponderant, sunt inæqualia.

c 1. post. huj. Nam si æqualia essent, [c]æquiponderarent, contra hypothesin.

Et hoc: Si gravia æqualia æquiponderent, distantiæ sunt æquales. Nam si inæquales essent, non æquiponderarent, contra hypothesin.

Prop. II.

Inæqualia gravia ab æqualibus distantiis non æquiponderant, sed ad majus vergent.

Nam si à majori dematur excessus, residuum æquabitur & [a]æquiponderabit minori: quare totum majus [b]præponderat. *Q. E. D.*

a 1. post. huj.
b 3. post. huj.

Schol.

Momenta ponderum ad eandem (vel æqualem) à libræ centro distantiam, ponderibus ipsis proportionalia sunt.

Fig. 171. Gravium A, B ad æquales distantias C A, C B appensorum momenta sint α, β. Sit autem M utcunque multiplex gravis A, & μ æquè multiplum momenti μ. [a]ergo μ est momentum gravis M ad distantiam C A. Similiter ipsorum B, β sumptis æquè multiplis N, ν; erit ν momentum gravis N ad B appensi: quòd si M $=, \sqsubset, \sqsupset$ N, erit respectivè μ [b]$=$, [c]$\sqsubset$, [c]$\sqsupset$ ν. unde A. B :: $\alpha . \beta$ *Q.E.D.*

a 2 cor. 1. post.
b 1 post. huj.
c 2 hujus.

Hisce verò suppositis.

Prop.

Prop. III.

Inæqualium æquiponderantium (A, B) *distantiæ* (C A, C B) *sunt inæquales*; *& minor* (C A) *majoris* (A). Fig. 172.

Sit enim A — X = B. ergo ad has distantias præponderabit B ipsi A — X. quapropter erit C B ⊏ C A. *Q.E.D.*

Coroll. Simili modo liquet ab inæqualibus distantiis (C A, C B) æquiponderantium (A, B) id majus esse, quod est à minore distantia (C A).

Sit enim C Q = C A. [a]ergo B ad distantiam C Q minùs ponderat, quàm ad distantiam C B, [b]hoc est quàm A ad distantiam C A. [c]unde liquet esse B ⊐ A. *Q.E.D.*

a 2 *post. huj.*
b *hyp.*
c *sch.* 1, & 2 *h.*

Prop. IV.

*Si duæ æquales * magnitudines* (A, B), *non idem habeant centrum gravitatis, ex ambabus compositæ magnitudinis* (A + B) *centrum gravitatis erit medium* (C) *rectæ* (A B) *conjungentis centra gravitatis magnitudinum.* Fig. 173.

* *Magnitudines æquales homogeneas intellige, tum hîc, tum in sequentibus; vel æqualia duo pondera, (nam de æqualibus magnitudinibus specie differentibus (aut saltem pondere diversis) non valet.)*

Quòd centrum compositæ magnitudinis A + B sit in recta A B, προδέδεικται, inquit Auctor; unde colligitur in editis libris aliquid deficere, nam tale quid nullibi præmonstratum apparet: nos illud verò, simul ac illam, quæ præ manibus est, propositionem è definitione centri gravitatis utcunque deduximuus. vide *Coroll. Scholii ad* 1 *post hujus.*

Prop. V.

Si trium magnitudinum (A, C, B) *centra gravitatis* (A, C, B) *in directum posita sint, & æqualem magnitudines gravitatem habeant, & quæ inter centra sunt rectæ* (C A, C B) *æquales sint, ex omnibus compositæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum* (C) *quod & centrum gravitatis est ipsarum mediæ* (C).

Nam quia magnitudo C æquilibratur in puncto C, & huic utrinq; ad æquales distantias accedunt æqualia pondera A, B, non mutabitur æquilibrium. *Vide sch. ad* 4. *post. hujus.*

Vel

a 4 *hujus.*
b *hyp.*

Vel sic: quia punctum C est centrum *gr.* [a]ipsius A+B, & [b]ipsius C; [a] erit totius A+B:+C centrum gravitatis inter C, & C medium, hoc est ipsum C.

Coroll.

1. Ex hinc patet, quòd si quotcunque magnitudinum multitudine imparium centra gravitatis in directum posita sint, siquidémque tum æqualiter à media magnitudine distantes æqualem gravitatem habeant, tum rectæ ipsarum centris interjectæ æquentur: ex omnibus compositæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum, quod & ipsarum mediæ centrum est gravitatis.

2. Sin autem multitudine pares sint magnitudines, & centra gravitatis ipsarum in directum posita sint, & ipsarum mediæ (*necnon æqualiter utrinque distantes à mediis) æqualem gravitatem habeant, & centris interjectæ rectæ æquentur; ex omnibus compositæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum medium rectæ centra mediarum connectentis, ut subscribitur, (& in apposita figura expressum vides.

* *Ista verba desunt in exemplaribus; at supplenda esse cùm res ipsa docet, tum hujus applicatio in prop. IX* (*vel 7 in* Basileensi Græca) *ubi habentur verba,* καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων &c.

Fig. 174.

Prop. VI.

Fig. 175. *Commensurabiles magnitudines* (Z, Y) *æquiponderant à distantiis eandem reciprocè proportionem habentibus cum gravibus.*

a *hyp.*
b 10. 10.
c 3. 10.
d 2 *ax.* 1.
e *const.*
f 2 *ax.* 10.
g 15. 5.
k *priùs.*

Sint C A. C B :: Z. Y. ergo cùm [a]sint Z, Y commensurabiles, [b]erunt quoque rectæ C A, C B commensurabiles; [c] sit igitur harum communis mensura M; fiant verò A E, & A D singulæ æquales ipsi C B, & B F = C A. [d]ergo est E B = C A = B F; & E F = 2 C A; [e] ac E D = 2 C B. [f]ergo M ipsas E F, E D metitur; & est E F. E D :: [g] C A. C B [e]:: Z. Y. quoties autem M metitur E F, toties quædam X metiatur Z. quapropter erit M. E F :: X. Z. [k]Item est E F. E D :: Z. Y. ergo erit ex æquo M. E D :: X. Y. adeóque quoties M metitur E D, toties X metietur Y; & est X mensura communis ipsarum Z, Y. Itaque si dividatur E F in partes æquales ipsi M, & Z in totidem æquales ipsi X, & singulis ipsius E F particulis ad ipsarum medium punctum appendatur æqualis ipsi X, harum omnium gravitatIs centrum erit punctum B (siquidem æquinumeræ sunt hinc inde.) Similíque prorsus ratione punctum A centrum gravitatis erit tot eidem X æqualium, quoties M continetur in E D, ipsam Y com-

componentium, & similiter dispositarum. Harum autem omnium gravitatis centrum erit punctum C, rectam F D bisecans (quippe D A = C B, & A C = B F, ac ideo C D = C F) ergo si Z ponatur ad B, & Y ad A, hæ ad distantias C B, C A æquiponderabunt. *Q.E.D.*

Coroll.

Si sit Z. Y $\sqsupset$ C A. C B. præponderabit Y ad A posita ipsi Z ad B constitutæ, & vice versâ; si Y præponderet ipsi Z, erit Z. Y $\sqsupset$ C A. C B.

Schol.

Non ignoro contra discursum hunc quædam objectari, quin ipse superiùs innui principiis ipsis suspicionis causam subesse: sed non est animus disputare, nec incumbit mihi judicium interponere. Refero mentem auctoris, eam neq; tuebor, nec impugnabo. In altero de æquiponderantibus, qui vulgò inscribitur libro, ratiocinium adhibet *Prop. 1.* ab hoc nonnihil diversum, sed eisdem exceptionibus obnoxium.

Prop. VII.

Quinimò si incommensurabiles sint magnitudines (Z X Y) *à distantiis* (C B, C A) *eandem reciprocè cum magnitudinibus proportionem habentibus æquiponderabunt.* Fig. 176.

Si neges; alterutra Z X præponderet, itaque minor eâ quædam æquiponderabit; hanc inter & totam Z X [a]sumatur media quævis Z, ipsi Y commensurabilis. [b]Patet Z (quoniam æquiponderante[c] major est) ipsi Y præponderare. Verùm ob Z. Y [d]$\sqsupset$ (Z X. Y [e]::) C A. C B; [f]præponderabit Y ipsi Z: quæ repugnant.

a *lemm ad* 8. 3. *Theod.*
b 3 *post. hujus.*
c *const.*
d 8. 5.
e *hyp.*
f *coroll. præc.*
k *ad* 3 *post.*

Similiter è distantiis arguamus licet. Si Z X præponderet ad distantiam C B, æquiponderet ad E, & inter C B, C E media [a]sumatur aliqua C D ad C A commensurabilis; [k]ergo Z X præponderabit ad D. Sed contra quia Z X. Y[c]:: (C A. C B) [d]$\sqsupset$ C A C D. [f]præponderabit Y ipsi Z X ad D positæ: quæ rursus adversantur sibi.

Ex duabus præcedentibus universalis conflatur hæc propositio: *Gravia quælibet è distantiis reciprocè proportionalibus æquiponderant.*

Quæ simul ac semel hoc modò succinctiùs (& *Archimedeis* fermè principiis insistendo) ostendi possit. Sit recta quævis A B, utcunque secta in D: bisectis partibus D A, D B in E, & F, totâque A B bisectâ in C; liquet E fore centrum partis D A, & F partis D B, & Fig. 177.

C totius A B; adeóque D A + D B sustentata in C æquilibrabitur. Cùm igitur sit $EC = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} DA$; & $FC = \frac{AB - DB}{2}$. adeóque $EC . FC :: AB - DA . AB - DB :: DB . DA$: sunt rectæ D A, D B centrorum distantiis E C, F C reciprocè proportionales: & cum hisce rectis quælibet gravitates, ipsarum magnitudinibus proportionales, assignari possint, æquè de quibuscunque gravibus hoc verum erit.

Cæterùm ex hoc Palmario, *totiusque Staticæ præcipuo theoremate* complura subnascuntur *Corollaria.*

I. Si gravia qualibet è quibusvis distantiis æquiponderent, etiam iis proportionalia quævis gravia ab iisdem distantiis (homologa homologis) æquiponderabunt.

11. 5. Retinebitur enim reciproca gravium & distantiarum proportionalitas.

II. Si æquiponderantibus addantur aut subtrahantur æquiponderantia, tota vel residua æquiponderabunt.

12. 5. Nec enim hîc immutabitur reciproca proportionalitas.

Axiomatis accenseri meruit hæc propositio, suprà nobis, *Ubaldo*, & aliis.

Fig. 178. *III. Æqualium gravium* (A, B) *momenta distantiis suis* (C A, C B) *proportionalia sunt.*

a 6, 7 *hujus.* Quâvis assumptâ distantiâ C Q concipiatur esse Z. A :: C A. C Q. [a]ergo ponderis Z ad Q suspensi momentum æquatur momento ponderis A ad distantiam A C. Item sit B (vel A). Y :: C Q. C B. [a]ergo momentum ponderis Y ad Q æquatur momento ponderis B ad distantiam B C. Est autem ex æquo Z. Y :: C A. C B; & momenta ponderum Z, Y ad Q suspensorum [b]ipsis Z, Y prodortionalia sunt. ergo liquet propositum.

b *sch.* 2 *huj.*

IV. Quorumcunque gravium (A, B) *ad quascunque distantias momenta compositam habent è ponderum ipsorum & distantiarum* (C A, C B) *proportionibus rationem.*

Nam momentum ponderis A in A positi ad momentum ponderis B in B, rationem [c]habet compositam è ratione momenti ponderis A in A ad momentum ponderis A in B positi ([d]hoc est è ratione distan-

c 20. *def.* V.
d *cor. præc.*

tiæ C A ad C B) & è ratione momenti ponderis A in B ad momentum ponderis B in B positi ([e]hoc est è ratione ipsius A ad B). Hinc vero e *sch. 2 hujus.*

V. *Momenta gravium se ad invicem habent, ut ipsa gravia ducta in suas distantias.*

Nempe C A × A repræsentat momentum gravis A ad distantiam A C; & B × B C momentum exhibet gravis B ad distantiam B C.

Hinc quod è gravi in suam distantiam ducto provenit, à quibusdam momentum appellatur; quale momentum notum & distantiæ applicatum exhibebit ipsum grave; per ipsum verò grave divisum distantiam notificabit.

VI. *Si recta* (A B) *duarum quarumvis magnitudinum centra* (A,B) *connectat, ex iis compositæ magnitudinis centrum in ista recta* (A B) *existet.* Fig. 179.

Nam si divisa concipiatur recta A B in C, [a]sic ut sit A. B :: C B. C A; [b]magnitudines A, B ad distantias C A, C B æquiponderabunt; [c]adeóque punctum C erit centrum gravitatis compositæ A + B., unde a *10. 6.* b *6 & 7.* c *not. ad 1 post.*

VII. *Si quotcunque magnitudinum centra sint in una recta, compositæ ex omnibus magnitudinis centrum in eadem existet.*

Nam compositæ ex duabus quibuscunque centrum in illa [d]erit, tum ejus compositæ, ut unius, & tertiæ centrum in eadem erit; ac harum trium, & alterius quartæ consimili pacto, & sic porro, donec ad omnium summam perventum est. d *6 cor.*

Prop. VIII.

Si ab aliqua magnitudine (MNO) *detrahatur magnitudo* (M N P) *non habens idem centrum cum toto, reliquæ magnitudinis* (N P O) *centrum gravitatis est, si recta* (A C) *gravitatum centra, totius magnitudinis, & ablatæ connectens, protrahatur ad easdem partes, ad quas est totius magnitudinis centrum* (C), *& accipiatur quædam* (CB) *è protracta dicta centra conjungente, sic ut eandem rationem habeat ad illam* (C A) *centris* (C A) *interjectam, quam habet gravitas ablatæ magnitudinis* (MNP) *ad gravitatem reliquæ* (NPO), *acceptæ terminus* (B). Fig. 180.

[a]Patet enim centra totius & partium in una recta (B C) versari; positóque puncto D residuæ N P O centro, quia C totius M N O centrum [b]est, [b]& A partis M N P, [c]erit C D. C A :: M N P. N P O [b]:: C B. a *6 cor. præc.* b *hyp.* c *6 & 7 hujus.*

d 9. 5. e const. [b]:: C B. C A. [d]ergo C D = C B : & puncta D, B coincidunt, [e]quare B est centrum partis N P O. *Q.E.D.*

Coroll.

Fig. 181. Ex his facilè (juxta methodum, vel hypothesin indivisibilium) consectatur centrum gravitatis figuræ cujuslibet planæ in ejus, siquam habet, diametros (hoc est in recta basi parallelas rectas bisecante) versari; necnon centrum gravitatis figuræ cujuscunque solidæ in ejus axe (hoc est in recta per parallelorum basi planorum centra transeunte) reperiri.

a 7 cor. præc. Nam quia, verbi gr. centra rectarum M N (basi B A parallelarum) sunt in diametro V K, [a]erit ex omnibus constitutæ figuræ V B A centrum in eadem V K. Idem de solidis liquidò clarum est; quin & de superficiebus, & lineis quibusvis axem habentibus, aut axi rectam analogam.

Prop. IX.

Fig. 182. *Omnis parallelogrammi* (M N O P) *centrum gravitatis existit in recta* (V K) *oppositorum parallelogrammi laterum bisegmenta connectente.*

Ex præcedente corollario satis liquet, at morosiùs *Archimedes* hoc modo.

Si negas, esto centrum alicubi extra V K in D; per quod ducatur
a cor 1. 10. D C ad M N parallela. Continuâ jam æquisectione rectæ V N ali-
b 20. 1. & 1. quando [a]relinquetur segmentum V K ⊐ C D; similitérque divisâ
def. 6.
c 36. 1. V M, si per utriusque segmenti (V N, V M) divisiones ducantur ad
d cor. 5. V K parallelæ, dispertietur totum parallelogrammum M O in paral-
lelogramma [b]similia, & [c]æqualia ipsi Q K, & ad utrasque rectæ V K partes æquinumera; [*quin & horum omnium centra sunt in una recta, pariter à se dissita;] [d]ergo totius ex his compositi parallelogrammi M O centrum existet in recta mediorum centra connectente. Verùm D extra medium Q K situm est. ergo D non est centrum, contra quod ipse asseruisti.

*Hoc sumit auctor, ast ubi probaverit, non reperio; expendas annon principium petat.

Aliter.

Fig. 183. Sint A, B centra parallelogrammorum M K, V O, quæ conne-
f 36. 1. ctat recta A B, secans ipsam V K in C, ducantúrque A K B V. &
g 29. 1. & 1. quoniam parallelogramma M K, V O [f]æqualia sunt, ac [g]similia, si
def. 6. conjungantur ea, ipsorum centra congruent. Quare rectæ A K, B V
(ad

ad æquales & congruentes angulos ductæ) congruent, ut & anguli VKA, KVB: sed & anguli ACK, VCB [k]pares sunt. [l]ergo rectæ CA, CB congruent, & æquales erunt. [m]ergo CA. CB :: pgr VO. VP; [n]consequentérque punctum C est centrum totius parallelogrammi MO. *Q.E.D.* h 5. post. hujus k 15. 1. l 26. 1. m 7. 5. n vid. 6 cor. 7. hujus.

Coroll. Simul patet centrum C rectam VK bisecare. Nam recta CV, CK congruent.

Simili discursu ostendetur in *circulo, ellipse, sphæra, sphæroide, (talibusque cæteris figuris)* idem esse centrum gravitatis, & ipsius figuræ. Fig. 184.

Sit enim VK diameter, & A, B centra gr. segmentorum VMK, VNK; quæ, segmentis congruentibus, congruent. adeóque triangula ACK, BCV congruent; & propterea CA = CB; ac VMK. VNK :: CB. CA. adeóque C est centrum gr. totius. quinetiam CV = CK; & proinde C est centrum figuræ. Liquet igitur.

Prop. X.

Cujuscunque parallelogrammi (MNOP) *centrum gravitatis est punctum* (C) *in quo diametri conveniunt.* Fig. 185.

Recta VK bisecet adversa parallelogrammi latera MN, PO; & EF bisecet latera MP, NO. [a]Igitur in utraque VK, EF est centrum gravitatis parallelogrammi MNOP; [b]ergo intersectio C est centrum: sed & in hoc diametri conveniunt: nam connexis CM, CO; quia CK [c]= CV; & KO [c]= VM, & ang CKO [d]= ang CVM, est ang KCO [e]= ang VCM: adeóque OCM [f]est linea recta: quare diameter MO per C transit. Simili discursu ducta diameter PN per C transibit. Et liquet propositum. a 9 hujus. b 10 ax. 1. el. c const. & 34. 1. d 29. 1. e 4. 1. f 2 sch. 15. 1.

Prop. XI.

Si duo triangula (VBA, XDE) *similia sint inter se, & in ipsis puncta* (C, K) *posita similiter ad triangula; unumque punctum* (C) *trianguli in quo existit centrum sit gravitatis, etiam reliquum punctum* (K) *est centrum gravitatis trianguli, in quo existit.* Fig. 186. Fig. 187.

Si negas, aliud Z centrum esto; rectæque ducantur à punctis K, C, Z ad angulos æquales D, B; & E, A. Et quia puncta Z, C sunt similium triangulorum XDE, VBA [a] centra, [b]similiter erunt posita; [c]quapropter anguli ZDE, CBA pares sunt. At verò quia puncta a hyp. b 6 post. hujus. c 7 post. hujus.

K,

d 1 *ax.* 1. *el.* e 9. *ax.* 1. K, C [b]similiter posita sunt, [c] etiam ang K D E = ang Z D E. [d] ergo anguli K D E, Z D E æquantur. [e]*Q.E.A.*

Prop. XII.

Fig. 188. 189. *Si duo triangula* (V B A, X D E) *similia sint, unius autem trianguli* (V B A) *gravitatis centrum* (C) *sit in recta* (V L) *ab angulo quopiam ad mediam basin ducta, etiam reliqui trianguli centrum gravitatis erit in consimili ducta rectâ* (X M).

a 10. 6. b *hyp.* c 6. 6. d *const.* e 7. *post. hujus.* f *hyp.* g 6. *post.* [a]Fiat V L. V C :: X M. X K; & connectantur rectæ C B, C A; K D, K E. & quia V B. B A [b]:: X D. D E; erit consequentes bifariando V B. B L :: X D. D M. Item ang V B L = [b]X D M. [c]ergo triangula V B L, X D M similia sunt; [c] & est B V. V L :: D X. X M. ergo cùm sit V L. V C [d] :: X M. X K; erit ex æquo V B. V C :: D X. X K. [c]ergo triangula B V C, D X K similia sunt. quare reliqua triangula C B L, X D M etiam similia sunt. Simili discursu patebit triangula C V A, K X E; & triangula C A L, K E M assimilari. [e]quare puncta C, K similiter poni constat. unde cùm C [f]sit centrum trianguli B V A, [g]erit K trianguli D X E centrum. *Q.E.D.*

Prop. XIII.

Fig. 190. *Omnis trianguli* (V B A) *centrum gravitatis est in recta* (V K) *quæ ab angulo* (B V A) *in mediam deducta est basin.*

Constat hoc aliquatenus è dictis apud Prop. 8. ast *Archimedeam* ἀκρίβειαν negligere non licet, quam plerique juniores, in hujusmodi materiis, imitantur. Fontes, è quibus posteritas hausit, & exemplaria quæ respexit, imprimis jucundum est contemplari. Sic igitur procedit Auctor noster.

a *cor.* 1. 10. b 4. 6. c *sch.* 7. 5. d 9. 5. e 9 *hujus.* Si negas; esto centrum Z, extra rectam V K; & ab Z ducatur Z Y ad A B parallela. [a]Bisecetur K A continuò, donec segmentum K E minus evadat ipsâ Z Y; similíque ratione dividatur reliqua semissis K B; tum utrinque per divisionum puncta ducantur rectæ EO, F N, G M, H R, I Q, L P, ad V K parallelæ; connectantúrque rectæ P M, Q N, R O (quæ basi B A parallelæ erunt; quia V K. M G [b]:: A K. A G [c]:: B K. B L [b]:: V K. P L; [d]ideóque M G = PL, & simili discursu F N = I H &c). Liquet autem parallelogrammorum L M, φ N, ψ O centra gravitatis [e] existere in recta V K (eorum quippe

quippe bases [f]bisecanti) & proinde totius ex iis compositæ, triangulo inscriptæ figuræ, [g]centrum in eadem V K fore; quod sit C; connectatur C Z, eique protractæ occurrat A S ad K V parallela. Patet autem triangulum V K B ad residua triangula P L B, Q φ P, R ψ Q, V X R, *simul sumpta se habere sicut K B ad K H, (nam ductâ VH, triangulum V K H triangulis P L B, Q φ P, R ψ Q, V X R æquatur; quoniam altitudo illius horum [g]altitudinibus simul sumptis, & basis ejus horum singulæ basi æquatur; éstque triang V K B . V K H [h]:: K B. K H. Item simili de causa patet triang V K A ad triangula M G A, V X O, & reliqua ex ista parte, se habere sicut K A ad K E (vel K B ad K H). *ergo junctim totum triangulum B V A se habet ad ista cuncta residua triangula, sicut K A ad K E, [k]hoc est ut C S ad C D; [l]hoc est in majori ratione quàm C S ad C Z. quare dividendo habebit figura dictis parallelogrammis constans ad residua cuncta triangula majorem rationem quàm Z S ad Z C; sit ergo summa parallelogrammorum istorum ad dictam summam triangulorum, ut Z T ad Z C; ergo cùm sit Z T. Z C ⊏ Z S. Z C. [m]erit Z T ⊏ Z S. quia verò Z est centrum gr. totius trianguli B V A, & C centrum dictæ summæ parallelogrammorum, & se reciprocè habet Z T ad Z C, ut summa parallelogrammorum ad residuam ex toto B V A summam triangulorum; [n]erit T centrum gravitatis dictæ residuæ triangulorum summæ; quod fieri sanè [o]nequit; quoniam T ad unas hujus compositæ magnitudinis partes, & extra totum triangulum B V A positum ostendebatur. Itaque potius trianguli centrum est in recta V K. *Q.E.D.*

f hyp & sch. 4. 6.
g 7 cor. 7 huj.
* 12. 6.
g 2. 6. & 12. 5.
h 1. 6.
k 2. 6.
l 8. 5.
m 10. 5.
n 8 hujus.
o 9 post. hujus.

Aliter.

Si fieri potest, esto centrum extra V K ad Z; connectantur Z V, Z B, Z A; & K R, K S bisecent ipsas V A, V B (unde patet K R V S esse parallelogrammum) item ducantur R T, S X ad V Z parallelæ, & connectantur S R X T, Z K, M N. Hinc cùm sit B Z. B X [a]:: B V. B S [b]:: B A . B K [c]:: A B . A K [b]:: A V. A R [a]:: A Z . A T; [d] liquet S R, B A, X T, parallelas esse; & [d]K X, A Z, [d] & K T, B Z etiam esse parallelas. [e]Igitur in similibus triangulis A R K, B S K, A V B puncta T, X, Z similiter poni liquet. ergo cùm Z [f]sit centrum trianguli A V B, [g]etiam T, X erunt centra triangulorum A R K, B S K. ergo punctum N rectam X T [h]bisecans, [k]erit centrum è triangulis A R K, B S K [l](æqualibus nempe) compositæ magnitudinis. Punctum verò M [m]est centrum parallelogrammi K R V S (diametrorum utique intersectio) [n]ergo totius ex istis triangulis, & hoc parallelogrammo

Fig. 191.
a 4. 6.
b const. & 15. 5.
c 7. 5.
d 2. 6.
e 7. post. huj.
f hyp.
g 6 post. huj.
h hyp. sch. 4. 6.
k 4 hujus.
l 26. 1.
m 10. hujus.
n 6 cor. 7 huj.

grammo compositi trianguli V B A centrum erit in recta M N. Est verò M N (parallelogrammi quippe S R T X latera bisecans) ad R T, adeóque ad V Z °parallela, quapropter erit punctum Z extra rectam M N. ergo Z non-est centrum, contra quam affirmabas.

o 33. 1.

Prop. XIV.

Fig. 192. *Omnis trianguli* (B V A) *centrum gravitatis est punctum* (C) *in quo concurrunt rectæ* (V K, B E) *ab angulis ad media latera ductæ.*

a 13 *hujus.* b 10. *ax.* 1.

[a]Est enim centrum in utraque V K, B E; [b] ergo in communi puncto.

Coroll. 1. Vicissim rectæ ab angulis per centrum bisecant latera. Aliàs enim, quum centrum sit in iis quæ bisecant, plura forent centra; [b]quod fieri nequit.

b 3 *cor. sch* 1. *post. hujus.*

2. Tres ab angulis rectæ adversa latera bisecantes in uno puncto concurrunt. In centro nempe trianguli.

3. Recta C K $= \frac{1}{3}$ V K.

c 2. 6. d 4. 6. e *sch.* 4. 6.

Nam connexa F E est ad B A [c] parallela; quapropter est C G. K C [d]:: C E. B C [d]:: F E. B A [d] :: V G. G K [e] :: 1. 2. ergo componendo est G K. C K :: 3. 2. adeóque V K. C K :: 3. 1.

Hoc corollarium *Archimedeis* autographis excidisse videtur: nam indemonstratum (opinor) non assumeret auctor; quod facit tamen in proximè sequenti.

Prop. XV.

Fig. 193. *Omnis trapezii* (B M N A) *duo latera* (B A, M N) *sibi parallela habentis centrum gravitatis* (C) *est in recta* (XK) *parallelarum bisectiones conjungentes, sic divisâ, ut pars ejus* (X C), *terminum habens bisegmentum minoris* (M N) *parallelarum, ad reliquam partem* (C K) *hanc habeat rationem, quam habet utraque simul, æqualis duplæ majoris cum minori ad duplam minoris cum majori parallelarum* (X C. C K :: 2 B A + M N. 2 MN + B A).

a *sch.* 4. 6. b 13 *hujus.* c 8 *hujus.* d 10. 6.

Quod centrum trapezii sit in X K patet; quoniam productis B M, A N ad concursum in V, ducta V K ipsam M N quoque [a] bisecat, adeóque rectæ XK coincidit; & hinc utriusque trianguli V B A, V M N centrum [b]est in V K, [c]adeóque reliqui trapezii B M N A centrum in eadem existit. Porro [d]secetur recta X K trifariam in punctis H, G; per quæ ducantur rectæ O P, Q R ad B A parallelæ; itaque

ductis

ductis B X, N K, B N, has quoque [e]trisecabunt parallelæ O P; Q R. [e] 2. 6.
[f]ergo liquet punctum E fore centrum trianguli B N A; [f]& punctum F esse centrum trianguli M B N; adeóque connexâ E F, [g]hujus & [h]ipsius X K intersectio C erit centrum totius trapezii BMNA. [c]quapropter erit triang B N A. triang M B N ([k]hoc est B A. M N) :: C F. C E[l]:: C H. C G. unde antecedentes duplando componendóque est 2B A + MN. MN :: 2CH + CG.CG. Item simili discursu (inversè) 2M N + B A. B A :: 2C G + C H. C H. Igitur (istic & hîc permutando) 2B A + M N. 2C H + C G :: M N. C G :: B A. C H :: 2M N + B A. 2C G + C H. & rursus permutando 2B A + M N. 2M N + B A :: 2C H + C G. 2C G + C H. Est verò 2C H + C G[r] = (C H + H G[r] =) C X. & 2C G + C H = (C G + H G[r] =) C K. [s]quare 2B A + M N. 2M N + B A :: C X. C K. *Q.E.D.*

[f] 13 & 3. cor. 14 hujus.
[g] 6 cor. 7 huj.
[h] prius.
[k] 1. 6.
[l] 4. 6.
[r] const. & 2. ax. 1.
[s] 11. 5.

R DE



De Quadratura Parabolæ.

Archimedes Dositheo Felicitatem.

CUM audirem obiisse *Cononem*, qui nobis adhuc superstes erat in amicitia, te verò *Cononis* familiarem fuisse, & Geometriæ esse gnarum; illi quidem demortuo indoluimus ceu vero amico, & in Mathematicis planè mirabili; tibi verò protinus destinavimus mittere scribentes, ut *Cononi* decreveramus scribere, è Geometricis theorematis illud, quod antea quidem nemo contemplatus erat, à nobis verò jam perspectum est; primò quidem per mechanica repertum, postea verò Geometricè demonstratum. Eorum sanè, qui priùs Geometrica tractârunt, nonnulli aggressi sunt scribere, ut possibile sit *circulo dato, & circuli dato segmento æquale rectilineum spatium invenire*; nec non postea comprehensum sub *totius coni sectione, & recta spatium quadrare tentârunt; assumentes quæ nemo facilè concesserit *lemmata*; unde à multis illi damnati sunt hæc non advenisse. Veruntamen qui *parabolæ* segmentum comprehensum quadrare conatus fuerit, anteriorum scimus neminem, quod certè nunc à nobis inventum est; demonstratur enim *quòd omne segmentum comprehensum sub recta, & parabola, sesquitertium est trianguli basin habentis eandem, & altitudinem æqualem cum segmento*; hoc assumpto lemmate ad ejus demonstrationem, quòd inæqualium spatiorum excessus (quo majus excedit minus) potest ibi sibimet apponi, ut omne propositum finitum spatium exuperet: usurpârunt autem hoc lemma qui priùs extiterunt Geometræ; *etenim circulos duplicatam inter sese diametrorum rationem* habere demonstrârunt hoc utentes lemmate;

* ellipsis (*opinor.*)

De sph. & cyl. 1 *ax.* 5.

lemmate; & quòd *sphæræ triplicatam inter se rationem habent diametrorum*; quinetiam *quòd omnis pyramis tertia pars est prismatis eandem cum pyramide basin habentis, & altitudinem æqualem*; & quòd *omnis conus subtriplus est cylindri eandem cum cono basin habentis, & æqualem altitudinem*, similiter prædictum lemma sumentes scripserunt. Evenit verò prædictorum theorematum singulis haud secus ac illis quæ absque hoc lemmate demonstrata sunt adhibitam esse fidem; perinde etiam in similem fidem adductis iis, quæ nos edidimus. Ejus igitur exscriptas demonstrationes mittimus, primò sicut è mechanicis comperta sunt, postea verò prout etiam per Geometrica demonstrantur, præmittuntur autem & Elementa Conica, quæ ad demonstrationem usum habent. Vale.

Prop. I.

Fig. 194. *Apol. 46. 1.* *Si sit parabola* A B G; *sit autem recta* B D *parallela diametro, vel ipsa diameter; recta verò* A G *parallela illi, quæ coni sectionem hanc contingit ad* B; *erunt* D A, D G *æquales. Sin & D A æquetur ipsi* D G, *parallelæ. erunt ipsa* A G *& ea quæ sectionem contingit ad* B.

Apol. 5. 2.

Prop. II.

Apol. 35. 1. *Si sit parabola* A B G; *sit autem recta* B D *parallela diametro, vel ipsa diameter; ipsa verò* A D G *parallela ei quæ sectionem contingit ad* B; *at recta* G E *sectionem comtingat in* G; *erunt* B D, B E *æquales.*

Prop. III.

Apol. 20. 1. *Si sit parabola* A B G; *recta verò* B D *diametro parallela, vel ipsa diameter; & ducantur quædam rectæ* D G, Z H *parallelæ tangenti parabolam in* B; *erit ut* B D *longitudine ad* B Z, *ita* D G *potentiâ ad* Z H.

Hæc sanè (ait *Archimedes*) demonstrantur in conicis Elementis. —Cæterùm ambigi potest, utrum *Archimedes* Elementa citaverit, an ejus Transcriptores, omissis quas is apposuerat demonstrationibus ad illa nos ablegaverint. Utique de Conicis, quæ *Archimedis* temporibus extabant, Elementis nihil constat: ista saltem apud *Apollonium* jam habentur locis citatis.

Prop. IV.

Fig. 195. Fig 196. *Sit portio* A B G *comprehensa sub recta & parabola; recta verò* D B *à medio ipsius* A G *parallelo diametro ducatur, aut ipsa sit diameter; & connexâ recta* G B *producatur; quòd si deducatur altera quæpiam* T Z *ipsi* B D *parallela, secans utramque rectarum* A G, B G; *eandem rationem habebit* Z T *ad* T I *quam* D A *ad* D Z.

a 2. 6. Nam ducatur I K ad A G parallela: éstque B Gq. B Tq [a] :: (DGq.
b 34. 1. D Zq [b] :: D Gq. K Iq [c] :: B D. B K [d] ::) B G. B F. [e] quare B G, B T,
c 3 *hujus.* B F sunt $\div\!\div$. [f] unde B G. B T :: B G ± B T. B T ± B F :: T G. T F
d 4. 6. [d] :: T Z. T I. [a] est autem D G. D Z :: B G B T. [g] Ergo D G (D A).
e 20. 6. D Z :: T Z. T I. *Q.E.D.*
f 19. 5.
g 11. 5.

Prop.

Prop. V.

Si portio A B G *contenta sub recta & parabola; & ab* A *ducatur diametro parallela* Z A; *à G verò sectionem tangens in* G, *nempe* G Z: *siquidem in trigono* Z A G *ducatur aliqua* (KL)*parallela* A Z; *ducta*(KL) *in eadem ratione secabitur à parabola, ac* A G *à ducta; homologa verò erit pars*(AK) *ipsius* AG *ad* A *ductæ parti*(KH,)*quæ ad* A G. Fig. 197.

Sit D B diameter parabolæ, & producantur D B E, G B M. Et ob D B [a] = B E, [b]erit K I = I L; [c]item K I. I H :: A D. D K; & permutando K I. A D :: I H. D K :: [d]K I ± I H. A D ± D K :: K H. A K. [e]ergo 2 KI. 2 AD (hoc est KL. AG) :: K H. A K [d] :: KL—KH. A G—AK :: HL. KG; permutandóq; KH HL :: AK. KG. *Q.E.D.*
Coroll. [f]K L. K H :: A G. A K.

a 2 *hujus.* b *cor.* 4. 6. c 4 *hujus.* d 19. *vel* 12. 5. e 15. 5. f 4, & 18. 5.

Prop. VI.

Intelligatur verò illud(*quod & in speculatione proponitur conspiciendum*) *in* (*plano*) *recto ad horizontem, & in linea* A B; *dein quæ sunt ad easdem partes cum* D *concipiantur deorsum quæ verò in adversas sursum; Triangulum verò* B D G *sit rectangulum, habens rectum ad* B *angulum, & latus* B G *æquale dimidio jugi, videlicet ut æquetur* BA *ipsi* B G; *suspendatur verò triangulum ex punctis* B, G; *suspendatur verò & aliud spatium* Z *ab altera parte jugi ad* A; *& æquiponderet spatium* Z *suspensum ad* A *trigono* B G D, *in situ quo jam ponitur: dico spatium* Z *trigoni* B D G *tertiam esse partem.* Fig. 198.

Sit enim B E = $\frac{1}{3}$ B G; ducatúrque E C ad B D parallela; itaq; centrum gr. trigoni G B D [a]est in E C, & hoc suspensum ab E consistet ipsi Z æquiponderans; quare triang G B D. Z [b]:: (A B. B E :: G B. B E ::) 3. 1. *Q.E.D.*

a 3 *cor.* 14. 1. *de æquip.* b 6 & 7. 1 *de æquip.*

Conversè. Si Z = $\frac{1}{3}$ triang BDG, æquiponderabunt Z, & BDG.

Prop. VII.

Sit rursus linea A G *jugum, medium verò ipsius sit* B; *& suspendatur ad* B *trigonum* G D H; *sit verò trigonum* G D H *ambligonium, habens basim* D H, *altitudinem verò parem dimidio jugi* (B G); *& suspendatur trigonum* G D H *è punctis* B, G; *spatium verò* Z *suspensum ad* A *æquiponderet triangulo* G D H *sic habenti ut nunc jacet: similiter* Fig. 199.

militer demonstrabitur spatium Z tertiam esse partem trigoni G D H.

a *conv.* 6 *huj.* b 2 *cor.* 7. *de de æquip.* c *const.* Nam ſpatio Z adjiciatur E $= \frac{1}{3}$ triang B D G; [a] quapropter E æquiponderat trigono B D G; [b]ergo Z + E æquiponderat toti B H G. quare 3 Z + 3 E = triang B H G; unde cùm 3 E [c] = triang B D G; erit 3 Z = D H G. *Q.E.D.*

Prop. VIII.

Fig. 200. *Sit jugum* A, *medium verò ipſius* B; *& ſuſpendatur ad* B *trigonum rectangulum* G D E, *rectum habens angulum* E; *& ſuſpendatur è jugo ſecundum* G E; *ſpatium verò* Z *ſuſpendatur ad* A, *& æquiponderet ipſi* G D E *ſic habenti ut nunc jacet; quam verò rationem habet* A B *ad* B E, *hanc habeat trigonum* G D E *ad ſpatium* C: *dico ſpatium* Z *trigono* G D E *minus eſſe, ſed ipſo* C *majus.*

a 6 & 7. 1 *æquip.* b 14. 5. c 8. 1. 5. d *hyp.* e 10. 5. Sit trigoni E G D centrum gr. in perpendiculari H F; [a] quare Z. triang E G D :: H B. B A. [b]ergo Z $\sqsupset$ triang E G D. Item H B. B A [c] $\sqsubset$ E B. B A [d]:: C. triang E G D; adeóque Z. E G D. $\sqsubset$ C. E G D. [e] ergo Z $\sqsubset$ C.

Prop. IX.

Fig. 201. *Sit rurſus jugum quidem* A G, *medium verò ejus* B, *trigonum verò* G D C *ambligonium, baſin quidem habens* D C, *altitudinem verò* EG; *& appendatur è jugo ſecundum* G E; *ſpatium verò* Z *dependeat ab* A, *& æquiponderet trigono* G D C, *ſic habenti ut modò ponitur; quam vero rationem habet* A B ad B E, *hanc habeat trigonum* G D C *ad* L: *dico ipſum* Z *majus quidem eſſe ipſo* L, *minus verò ipſo* G D C.

Demonſtratur ut præcedens.

Prop. X.

Fig. 202. *Sit rurſus* A B G *quidem jugum, & medium ejus* B; *trapezium verò* B D C H, *angulos quidem ad puncta* B, H *rectos habens, latus verò* C D *inclinans verſus* G; *& quam habet rationem* A B *ad* B H, *hanc habeat trapezium* B D C H *ad* L; *ſuſpenſum verò ſit trapezium* B D C H *è jugo ad* B H; *item ſuſpendatur ſpatium* Z *ad* A, *& æquiponderet trapezio* B D C H, *ita ſe habenti ut jacet: dico ſpatium* Z *minus eſſe ipſo* L.

Nam

Nam [a]sit centrum trapezii B D C H in recta E F ad A G perpendiculari: éstque trap B D C H. Z (:: [b]A B. B E) [c]$\sqsubset$ (A B. B H [d]::) trap B D C H. L. [e]ergo Z $\sqsupset$ L. *Q.E.D.*

a 15. 1 *æquip.* b 6 & 7 *æquip.* c 8. 5. d *hyp.* e 10. 5.

Prop. XI.

Sit rursus jugum quidem A G, *& medium ipsius* B; *sit verò trapezium* C D T R *habens quidem latera* C D, T R *tendentia ad* G, *sed ipsa* D R, T C *perpendicularia ad* B G; *& cadat* D R *in* B; *quam verò rationem habet* A B *ad* B H, *hanc habeat trapezium* C D T R *ad* L; *trapezium verò* C D T R *suspendatur ex jugo ad* B H; *&* Z *ex* A; *ac æquiponderet* Z *trapezio* C D T R, *sic habenti ut modò jacet: similiter ac priùs demonstrabitur spatium* Z *minus ipso* L. Fig. 203.

Imò planè similiter ac priùs; quid ergo plura?

Prop. XII.

Sit rursus jugum quidem A G, *medium verò ejus* B; *sit verò trapezium* D E H C, *ad puncta quidem* E, H *rectos habens angulos, latera verò* C D, E H *vergentia ad* G; *& quam quidem rationem habet* A B *ad* B H, *hanc habeat trapezium* D E H C *ad* M; *quam verò rationem habet* A B *ad* B E, *hanc habeat trapezium* B E H C *ad* L; *suspendatur verò trapezium* D E H C *è jugo ad* E H; *spatium verò* Z *suspendatur ex* A, *& æquiponderet trapezio ita se habenti, ut nunc subjicitur: dico* Z *majus esse ipso* L, *minus verò ipso* M. Fig. 204.

[a]Sit enim trapezii D E H C centrum gr in K N ad E D parallela; hinc trap D E H C. Z ([b]:: A B. B K) [c]$\sqsupset$ (A B. B E [d]::) trap DEHC. L; [c] quare Z $\sqsubset$ L. Item trap D E H C. M ([d]:: A B. B H) [c]$\sqsupset$ (A B. B K [b]::) trap D E H C. Z; [e]unde Z $\sqsupset$ M. Quæ *E. D.*

a 15. 1 *æquip.* b 6 & 7. 1 *æquip.* c 8. 5. d *hyp.* e 10. 5.

Prop. XIII.

Sit rursus jugum quidem A G, *& medium ejus* B, *trapezium verò* C D T R, *ita ut latera* C D, T R *vergant ad* G; *sed* D T, C R *perpendicularia sint ad* B G; *suspendatur verò è jugo ad* E H; *spatium verò* Z *suspendatur ex* A, *& æquiponderet trapezio* C D T R *sic habenti ut nunc ponitur; & quam quidem habet rationem* A B ad B E, *illam habeat trapezium* C D T R *ad spatium* L; *quam verò rationem* Fig. 205.

A B

habet A B *ad* B H, *hanc habeat idem trapezium ad* M : *planè similiter ac in præcedenti ostendetur* Z *majus quidem quàm* L, *minus verò ipso* M.

Demonstratur prorsus ut proximè antecedens.

Prop. XIV.

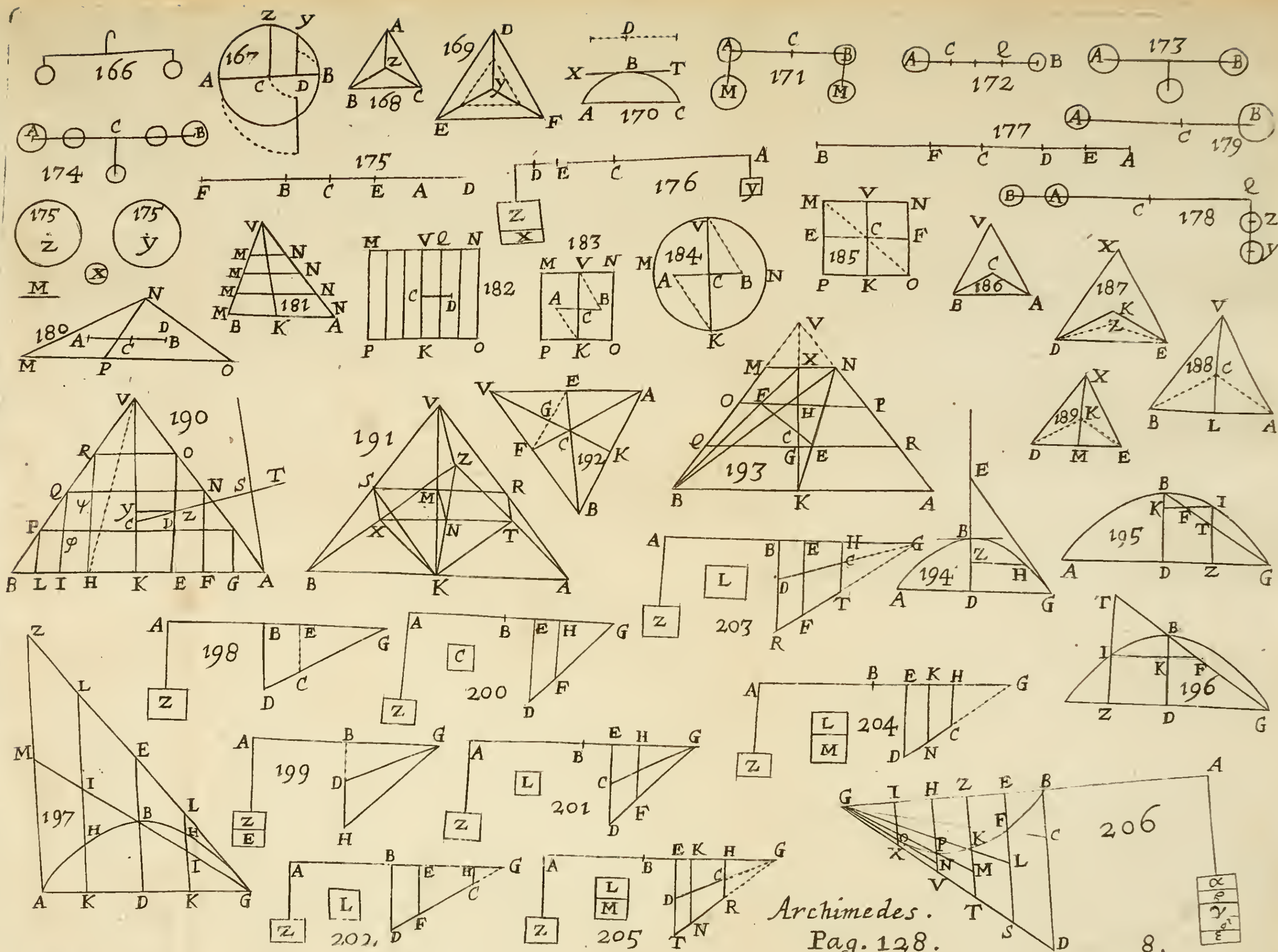
Fig. 206. *Sit portio* B K G *comprehensa sub recta, & parabola ; sit verò primùm* B G *ad rectos diametro, ducaturque à puncto* B *diametro parallela* B D ; *à* G *verò ipsa* G D *tangens parabolam in* G ; *enimverò erit* B G D *triangulum rectangulum ; dividatur autem* B G *in quotcunque partes* B E, E Z, Z H, H I, *& à sectionibus ducantur diametro parallelæ* E S, Z T, H V, I X ; *à punctis verò* (F, K, P, O) *ad quæ ipsæ secant parabolam, conjungantur rectæ ad* G, *& producantur : dico triangulum* B G D *trapeziorum quidem* C E, L Z, M H, N I, *& trigoni* X I G *minus esse quàm triplum ; trapeziorum verò* Z F, H K, I F, *& trianguli* I O G *majus esse quàm triplum.*

Sit A B = B G, & ab A suspendantur α, ϐ, γ, δ, ε æquiponderantia trapeziis D E, S Z, T H, V I, & trigono X I G, singula singulis,
a 2 *cor.* 7. *æquip.* & [a] cuncta proinde cunctis simul. Est verò G B. (A B). B E [b] ::
E S. E F [c] :: triang E S G. E F G. Item E S. E F [*] :: B D. B C [c] :: tri-
b *cor.* 5 *hujus.* ang B D G. B C G. [d] quare B D G. *B* C G :: E S G. E F G [e] :: BDG
c 1. 6. —E S G. B C G—E F G (hoc est) :: trap D E. C E ; [e] ergo trap
* *cor.* 4. 6. C E ⊏ α. Simili discursu est A B. B Z :: trap S Z. L Z ; [f] ac inde
d 11. 5. ttap L Z ⊏ ϐ, & A *B*. *B* H :: trap T H. M H ; [f] ideóque trap M H
e 19. 5. ⊏ γ ; item A B. B I :: trap V I. N I, atque idcirco trap N I ⊏ δ ;
e 10. *hujus.* ac denique A B. B I :: triang X I G. O I G ; & proinde triang XIG
f 12. *hujus.* ⊏ ε ; quare junctim C E + L Z + M H + N I + X I G ⊏ α
g 8 *hujus.* + ϐ + γ + δ + ε. Porro quoniam trap S Z. F Z [h] :: S E. F E [b] :: A *B*.
h *ut priùs.* *B* E ; [f] erit trap F Z ⊐ ϐ, similitérque trap K H ⊐ γ, & trap P I ⊐ δ, & triang O I G ⊐ ε ; ac denique trap F Z + K H + P I +
k 6 *hujus.* O I G ⊐ ϐ + γ + δ + ε : cùm itaque [k] sit α + ϐ + γ + δ + ε = $\frac{\text{triang D } B \text{ G}}{3}$, liquet propositum.

Prop. XV.

Fig. 207. *Sit rursus portio B* K G *comprehensa sub recta, & parabola, verùm B G non sit diametro normalis ; est autem necesse vel illam quæ à puncto B diametro parallela ducitur ad easdem partes sectioni, vel istam*

quæ



Archimedes. Pag. 128.

8.

quæ à G, *obtuſum facere angulum ad* B G ; *obtuſum angulum faciat quæ ad B, & à B ducatur diametro parallela* B D ; *& à* G *ipſa* G D *parabolam contingens in* G, *& dividatur* B G *in quotcunque partes* B E, E Z, Z H, A I, I G ; *& ab* E, Z, H, I *ducantur diametro parallelæ* E S, Z T, H V, I X, *& à punctis quibus hæ ſecant parabolam conjungantur rectæ ad* G, *& extendantur: enimverò & nunc dico triangulum* B D G *trapeziorum quidem* C E, L Z, M H, N I, *& trianguli* X I G *minus eſſe quàm triplum ; ipſorum verò* Z F, H K, I P, *& trianguli* G O I *majus eſſe quàm triplum.*

Eadem prorſus eſt demonſtratio quæ præcedentis, niſi quòd hic pro 10 & 12 hujus, adhibentur 11 & 13. quorſum itaque ταυτολογεῖν.

Prop. XVI.

Sit rurſus portio B X G *comprehenſa ſub recta, & parabola ; & per* B *quidem ducatur* B D *parallela diametro, à* G *verò ipſa* G D *tangens parabolam in* G, *ſit verò ſpatium* Z *tertia pars trigoni* B D G : *dico portionem* B K G *æquari ſpatio* Z. Fig. 208.

Si fieri poteſt, ſit primò Z ⊐ port B K G. Secetur tum B D in partes æquales B C, C Q, Q R, R Y, Y D, ita ut ſit triang B G Z ⊐ port B K G—Z ; unde erit Z ⊐ port B K G—triang B G Z. conjungantur G C, G Q, G R, G Y occurrentes parabolæ punctis F,K,P,O ; per quæ ducantur E S, Z T, H V, I X ad B D parallelæ. (Liquet verò ipſas B E, E Z, Z H, H I, I G etiam æquari ; * ob DC. CB :: SF . FE [a] :: GE. EB ; & DQ. QB * :: TK. KZ [a] :: GZ. ZB &c.) * cor. 4. 6. a 4 hujus.

Quia verò B C = C Q, *erit E F = F L ; [b]unde trap F Z = trap F K ; item ob Zφ * = K M, [b]erit trap φ H = trap K P ; paritérque trap ψ I = trap P O, & triang I G X [b] = triang O G X, ergo triang B G C = trap B F + F K + K P + P O + triang O G K. ergo Z ($\frac{1}{3}$ triang B D G) ⊐ (port B K G —: trap B F + F K + K P + triang O G X ⊐) trap F Z + K H + P I + triang O I G ; contra 14 vel 15 hujus. b 37. 1. & 2 ax. 1.

Sin dicatur Z ⊏ port B K G, ſit triang B G C ⊐ Z—port BKG ; unde portio B K G + triang B G C ⊐ Z, hoc eſt port B K G + trap B F + F K + K P + P O + triang O G X ⊐ $\frac{1}{3}$ triang BDG, ergo fortius erit trap C E + L Z + M H + N I + triang X I G ⊐ $\frac{1}{3}$ triang B D G ; itidem contra 14 aut 15 hujus.

Quin itaque potiùs erit Z = port BKG. *Q.E.D.*

Prop. XVII.

Fig. 209. *Hoc demonstrato, liquet quod omnis portio* (ABC), *comprehensa sub recta, & parabola, sesquitertia est trianguli* (ABC) *habentis basin eandem cum portione, & altitudinem æqualem.*

a 2 *hujus.* b 1. 6. c 20. 6. d 16 *hujus.* Ducatur tangens CF, cui occurrat diameter DB in E, éique parallela AF; & ob DB [a]= BE, [b]erit triang DEC ([c]id est $\frac{1}{4}$ triang AFC) = 2 triang DBC [b]= triang ABC. atqui [d]est port ABC = $\frac{1}{3}$ triang AFC; ergo triang ABC port. ABC :: $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{3}$ :: 3. 4 :: 1. $1\frac{1}{3}$. *Q.E.D.*

Hoc quod artificio quasi mechanico sic adstruxerat, dehinc methodo prorsus Geometricâ demonstratum exhibebit.

Definitiones

Portionum sub recta & curva comprehensarum

1. Basin quidem appello rectam istam;

2. Altitudinem verò maximam perpendicularem à curva linea demissam in basin portionis;

3. Verticem verò punctum, à quo maxima perpendicularis ducitur.

Prop. XVIII.

Fig. 210. *Si in portione* (ABC), *quæ continetur sub recta & parabola, à media base ducatur recta* (DB) *diametro parallela; vertex erit portionis punctum* (B), *in quo ducta diametro parallela* (DB) *secat parabolam.*

a 1 *hujus.* b 2 *def. ad* 17. *hujus.* Recta EF contingat parabolam in B, & demittatur BG ad AC perpendicularis; & quia EF est [a]parallela basi AC, liquet BG esse maximam perpendicularem earum quæ à sectione duci possunt in AC; & [b]proinde B fore verticem portionis ABC. *Q.E.D.*

Prop. XIX.

Fig 211. *Si in portionem* (ABC) *comprehensam sub recta & parabola ducantur duæ rectæ* (DB, FE) *parallelæ diametro, illa quidem* (DB) *à media base, hæc verò* (FE) *à media dimidia; erit ducta à media base*

base (D B) *ductæ à media dimidia* (F E) *sesquitertia longitudine.*

Nam ducatur (E G) parallela basi A C; & quia B D. B G [a] :: D Aq. G Eq [b] :: D Aq. D Fq [c] :: 4. 1, erit [d] convertendo B D. G D ([b]E F) :: 4. 3 :: $1\frac{1}{3}$. 1. *Q.E.D.* a 3 *hujus.* b 34. 1. c 20 *hujus.* d *cor.* 19. 5.

Cor. B D. B G :: 4. 1.

Prop. XX.

Si portioni (A B C) *compeehensæ sub recta & parabola inscribatur triangulum* (A B C) *eandem basin habens cum portione, eandemque altitudinem, majus erit inscriptum* (A B C) *quàm dimidium portionis.* Fig. 212.

Per verticem B ducatur tangens E F ([a]quæ basi est parallela), cui occurant A E, C F diametro parallelæ; liquétque pgr A E F C[b] (hoc est 2 triang A B C) majus esse portione A B C. a 1 *hujus.* b 41. 1.

Coroll. Hinc, liquet, quòd huic portioni possibile est polygonum inscribere, ita ut relictæ portiones minores sint omni proposito spatio.

Nam si portionibus A G B, C H B inscribantur triangula, [a]hæc auferent plusquam semisses portionum A H B, C H B; & si in reliquis id fiat, idem continget. [b]quare tandem ad reliquias dato spatio minores perveniatur necesse est. a 20 *hujus.* b 1. 10.

Prop. XXI.

Si portioni (A B C) *comprehensæ sub recta & parabola inscribatur triangulum* (AB C) *eandem basin habens cum portione, eandemque altitudinem; inscribantur verò & alia triangula* (A H B, C F B) *relictis portionibus* (A H B, C F B), *easdem bases habentia cum portionibus, eandemque altitudioem; singuloram triangulorum* (A H B, CFB) *relictis portionibus inscriptorum octuplum est triangulum* (ABC) *toti portioni inscriptum.* Fig. 213.

Nam quia G I. D B [a] :: A I. A B [b] :: 2. 4; & D B. G H [c] :: 4. 3; erit ex æquo G I. G H :: 2. 3; adeóque G I = 2 I H; [d] quare triang I A G = 2 triang H A I; ideóque triang B A D [e] (4 I A G) = 8 triang I A H. [f] quare triang A B C (2 B A D) = 8 triang A H B. *Q.E.D.* a 4. 6. b *const.* c 19. *hujus.* d 1. 6. e 20. 6. f 15. 5.

Coroll. Triang A H B + C F B = $\frac{1}{4}$ triang A B C.

Prop. XXII.

Fig. 214. *Si sit portio (A B C) comprehensa sub recta & parabola, & spatia ponantur quotcunque (X, Y, Z) deinceps in quadrupla ratione; sit verò spatiorum maximum (X) æquale triangulo (ABC) basin habenti eandem cum portione, & altitudinem eandem; simul omnia spatia minora erunt portione (ABC).*

Portionibus A H B, C F B inscribantur trigona A H B, C F B portionibus istis æquè alta; & altera pari modo reliquis portionibus A P H, C O F; H M B, F N B; constátque fore triang A H B + C F B [a] $= \frac{1}{4}$ triang A B C [b] $= \frac{1}{4}$ X = [b] Y; item pariter fore triang A P H + H M B [a] $= \frac{1}{4}$ A H B; & triang COF + FNB [a] $= \frac{1}{4}$ C F B; [c] adeóque triang A P H + H M B + C O F + FNB $= \frac{1}{4}$ A H B + $\frac{1}{4}$ C F B [d] $= \frac{1}{4}$ Y [b] = Z: ergo quum ista trigona simul omnia deficiant à portione A B C, erunt simul X, Y, Z eadem minora.

a cor. 21 huj.
b hyp.
c 12. 5.
d 15. 5.

Prop. XXIII.

D. C. B. A.
64. 16. 4. 1.

Si componantur magnitudines (D, C, B, A) deinceps in quadrupla ratione; omnes magnitudines, insuperque minimæ (A) pars tertia eidem summæ adjecta, erunt sesquitertiæ maximæ (D).

a hyp.

Nam quia D [a] = 4C, erit $\frac{1}{3}$ D $= \frac{4}{3}$ C = C + $\frac{1}{3}$ C; similitérque $\frac{1}{3}$ C = B + $\frac{1}{3}$ B; & $\frac{1}{3}$ B = A + $\frac{1}{3}$ A; est ergo $\frac{1}{3}$ D = C + B + $\frac{1}{3}$ B = C + B + A + $\frac{1}{3}$ A; quare D + C + B + A + $\frac{1}{3}$ A. D :: 1 + $\frac{1}{3}$. 1. *Q.E.D.*

Coroll. Hinc, figura portioni inscripta (juxta 22 hujus) minor est quàm $\frac{4}{3}$ trigoni A B C.

Fit enim (ibidem) è magnitudinibus X, Y, Z ∺ in ratione 4 ad 1, quarum maxima X æquatur triangulo A B C.

Scholium.

Liquidiùs id deducatur ex hac universali propositione.

Sint quotcunque quanta proportionaliter decrescentia in ratione α ad β; eorum sit extremum ω, & summa dicatur Z; erit Z $= \frac{\alpha\alpha - \beta\omega}{\alpha - \beta}$.

Nam

Nam ut primum ad secundum, *ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia, hoc est $\alpha . \beta :: Z - \omega . Z - \alpha$; quare (extrema & media in se ducendo) est $\alpha Z - \alpha\alpha = \beta Z - \beta\omega$; & (transponendo) $\alpha Z - \beta Z = \alpha\alpha - \beta\omega$; & (dividendo utrinque per $\alpha - \beta$) est $Z = \frac{\alpha\alpha - \beta\omega}{\alpha - \beta}$. * 12. 5.

Hinc si $\alpha . \beta :: 4 . 1$; erit $Z = \frac{4\alpha - \omega}{\alpha}$; ut in hac prop. 23.

Adnotetur autem, quòd si progressio continuetur ad infinitum, scilicet ut ω sit $= 0$ nihil; tunc evanescente termino $\beta\omega$, liquet fore $Z = \frac{\alpha\alpha}{\alpha - \beta}$.

Hinc si $\alpha . \beta :: 4 . 1$; erit $Z = \frac{4}{3}\alpha$.

Hinc autem brevissimè constat *Archimidea* quadratura; unáque plures innumeræ similiter eliciuntur.

Prop. XXIV.

Omnis portio (A B C) *comprehensa sub recta & parabola, sesquitertia est trianguli* (A B C) *eandem basin habentis cum ipsa, & altitudinem æqualem* Fig. 214.

Sit $Z = \frac{4}{3}$ triang A B C; &, si fieri potest, sit primò port A B C $\sqsubset$ Z: [a]inscribatur portioni figura A P H M B N F O C trigonis constans, (ut in præcedentibus) ac ita ut sit port A B C—fig A P H M B N F O C $\sqsupset$ port A B C—Z; est ergo Z $\sqsupset$ fig A P H M B N F O C; [b]hæc autem figura minor est quàm $\frac{4}{3}$ triang A B C; ergo magis Z $\sqsupset$ $\frac{4}{3}$ triang A B C, contra hypothesin. a cor. 20 huj. b cor. 23 huj.

Sit jam port A B C $\sqsupset$ Z; & concipiatur series magnitudinum (quarum summa vocetur S) progrediens in quadrupla ratione, (incipiens utique à triangulo A B C, & decrescens in ω) [c]ita ut sit $\omega \sqsupset$ Z—port A B C: cùm igitur sit $S + \frac{\omega}{3}$ [d] $= Z$; erit $\omega \sqsupset S + \frac{\omega}{3}$—port A B C; unde liquebit esse portionem A B C $\sqsupset$ S. [e] Quod est absurdum. c cor. 20. huj. d 23 hujus. e 22 huj.

Quare potiùs est port A B C $= Z = \frac{4}{3}$ triang A B C.

Coroll.

Coroll.

Hinc

a 41. 1. 1. Si ductâ F G per B ad A C parallelâ compleatur parallelo-
b 24 *hujus.* grammum A G; erit pgr. A G. port. A B C :: 3. 2. Nam pgr A G. triang A B C [a]:: 6. 3; & triang A B C. port A B C [b]:: 3. 4. quare ex æquo pgr A G. port A B C :: 6. 4 :: 3. 2.

2. Complementum A Y B F est $\frac{1}{2}$ semiportionis A B D.

3. Hinc facilè efficitur quadratum æquale portioni. Nam producatur D B in E, ut sit B E = $\frac{1}{3}$ B D; vel E D = $\frac{4}{3}$ B D; & connectantur E A, E C; liquet trigonum A E C æquari portioni ABC;
*14. 2. unde si *fiat trigono A E C æquale quadratum, liquet factum esse.

4. Itaque facilè ad datam rectam applicatur parabolica portio ad illam scilicet applicato triangulo A E C.

DE



De ÆQUIPONDERANTIBUS,

LIBER SECUNDUS.

Prop. I.

SI *duo sint spatia* (AB, CD) *contenta sub recta, & parabola,* **quam possumus ad datam rectam applicare; ex utroque ipsorum compositi magnitudinis centrum gravitatis* (H) *erit in recta connectente ipsorum centra gravitatis* (E, F), *dividens dictam rectam* (E, F), *ut ipsius partes* (EH, FH) *reciprocè eandem rationem habeant cum spatiis* (AB, CD). Fig. 216. * cor. 24. de qu. parab.

Accipe FG, FK pares ipsi EH (unde EG = FH), & fiat EL = EG (FH). ad GL applicentur pgr [a] GO, GP [b] utrumvis æquale dimidio AB, & productis OR, PQ compleatur pgr QM. Estque parab CD. parab AB [c]:: EH. FH [d]:: 2EH ([e] 2GF). 2FH(2EG) [e]:: GK. GL [f]:: QN. QP [g]:: pgr QM. QO [e] (parab AB) [h] unde parab CD = pgr QM. Cùm igitur [k] sit E centrum pgr[l] QO, & F centrum pgr[l] QM ([e] ob EG = EL, & FG = FK) sitque QM. QO :: EH. FH; liquet propositum.

a 3. ax. 1.
b cor. 24. de qu. parab.
c 6 & 7. 1 de æquip.
d 15. 5.
e constr.
f 34. 1.
g 1. 6.
h 14. 5.
k 9. 1 de æquip.

Manifestum,

Si portioni (ABC) *sub recta, & parabola contentum, inscribatur triangulum* (ABC), *eandem basim habens cum portione, & æqualem altitudinem; & rursus reliquis portionibus inscribantur triangula* (AEB, CFB) *easdem bases habentia cum portionibus, & æqualem altitudinem; & semper reliquis portionibus triangula inscribantur eodem modo* (AME, ESB, CNF, FTB &c); *orta figura* (AMESBTFNC) *portioni evidenter* inscribi dicatur. Liquet verò, quòd sic inscriptæ figuræ angulos connectentes* (ST, EF, MN), *quæque proximè sunt à vertice portionis* (B), *quæque deinceps parallelæ erunt portionis basi* (AC), *& bisecabuntur à portionis diametro* (BD); *& diametros secabunt in rationes numerorum deinceps imparium, uno dicto illâ* (BY) *quæ ad verticem portionis.* Fig. 217.

*Notabiliter, γνωρίμως.

Hoc

Hoc demonstrandum est in *Ordinibus.

* *Librum innuit, cui inscriptum* τάξεις, (Ordines *vel* Series), *de quo nihil admodum constat.*

a 1 *de qu. par.* b 4. 6. c 15. 5. & 7. 5. d 11. 5. e 14. 5. f 4 *de qu par.* g 2 *ax.* 1. h 33. 1. k *cor.* 19. *de quad. parab.*

Nam (ductis M P, E H, N R, F L diametro parallelis) erit A G = G B; &[b] ideo A H = H L; [a]similitérque A I = I E, ac [b]ideo A P = P H; & sic porro A D in partes æquales dividetur, & pariter C D in totidem æquales; [c]unde A P = CR. Cùm igitur sit AP.PO[b]:: AD.DB[b]::CD. DB::CR.RQ[d]:: AP.PO.[e]Erit RQ = PO. item P O . OM [f]:: D C . D P[e]:: A D . D R [f]:: R Q QN [d] :: P O. O M, [e]quare QN = O M, [g]itaque R N = P M, [h]& M N ipsi A C parallela est. Simili discursu E F, & S T ipsi A C parallelæ ostendentur; [a]unde M V = V N, & E X = X F &c. Denique B D. B X [k]:: 4. 1. Et simili modo, B X. B Y :: 4. 1; unde si B Y ponatur 1, erit Y X = 3. (B X = 4, B D = 16, X D vel E H = 12) item H G. D B ([b]A H. A D) :: 8. 16. unde E G = 4: ducatur M Z ad A B parallela, & ob E G. E Z [k]:: 4. 1; erit Z G (M O) = 3, & OP ($\frac{1}{2}$ H G) = 4, ergo M P (V D) = 7, & proinde X V (X D—V D) = 5. Ex quibus constat de omnibus. *Q.E.D.*

Coroll. 1. E G = F K. unde
2. G K prrallela ad E F.
3. E G = B X = $\frac{1}{4}$ B D.

Prop. II.

Fig. 218. *Si verò portioni* (A B C) *comprehensa sub recta, & rectanguli coni sectione rectilineum* (A M E S B T F N C) *evidenter inscribatur, inscripti centrum gravitatis erit in portionis diametro* (BD).

a *lemm. præc.* b 15, & 13. 1 *de æquip.* c 7 *cor.* 7. 1 *de æquip.*

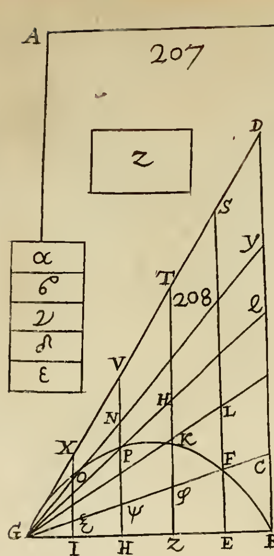
Nam connectantur anguli rectis M N, E F, S T, [a]hæ parallelæ sunt basi A C, & bisecantur à diametro B D; [b]quare trapeziorum A N, M F, E T, & trigoni S B T singula centra gravitatis sunt in diametro B D. [c]ergo & compositi ex his centrum gr. est in eadem. *Q.E.D.*

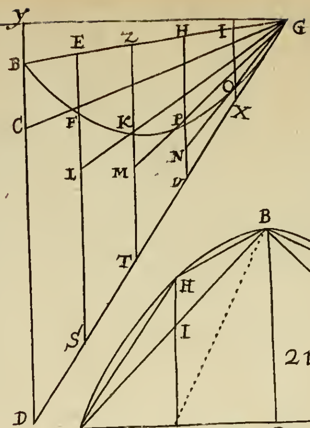
Lemma.

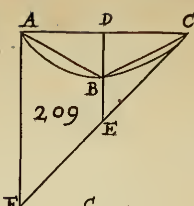
Fig. 219. 220. Sint trapezia D E, *d e*, & M G, *m g*, in quibus D M. M N :: *dm. mn.* & D A. M E :: *d a. m e.* Atque M E. N G :: *m e. n g.* erit trap. D E. M G :: trap *de. mg.*

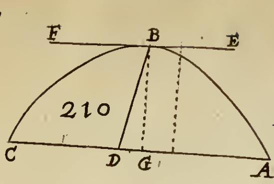
Producantùr A E P, E G O, *a e p*, *e g o*, ut occurrant ipsis DN, *dn.*

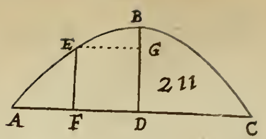
Estque

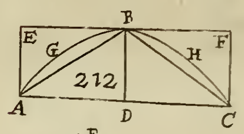

A
207
Z
α
ϐ
ν
δ
ε
D
S
y
T
208
ℓ
V
N
H
L
X
K
P
F
C
O
φ
ψ
ξ
G
I
H
Z
E
B

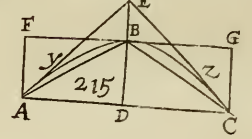

y
E
Z
H
I
G
B
C
F
K
P
O
X
L
M
N
D
T
S
D

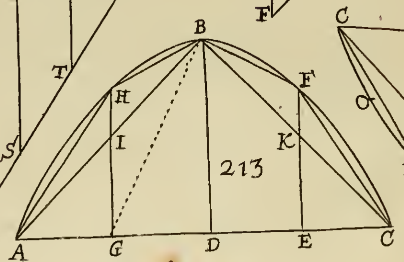

A
D
C
B
209
E
F

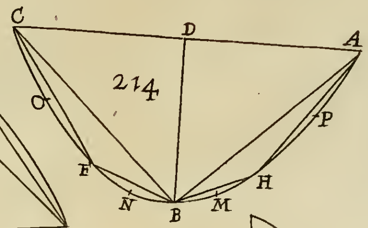

F
B
E
210
C
D
G
A

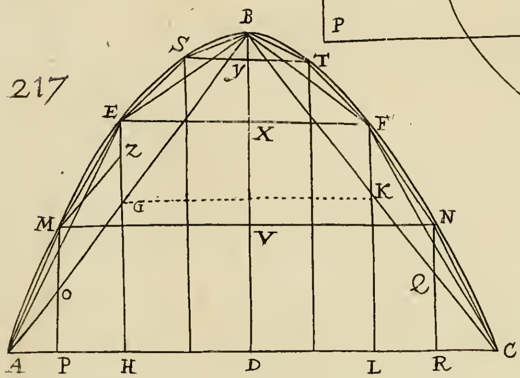

B
E
G
211
A
F
D
C

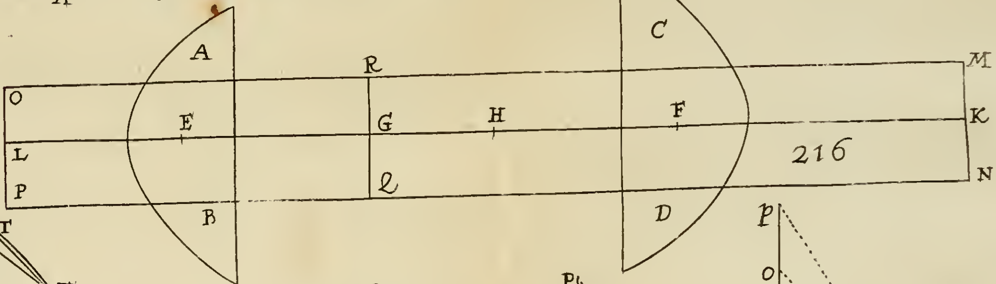

B
E
G
F
H
212
A
D
C

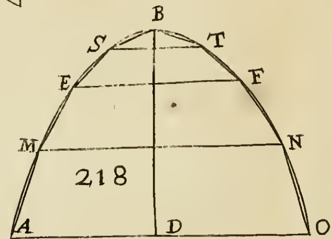

E
F
B
G
y
Z
215
A
D
C

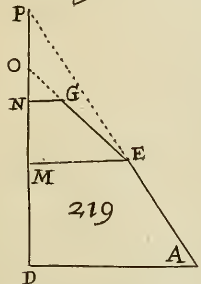

B
H
F
I
213
K
A
G
D
E
C

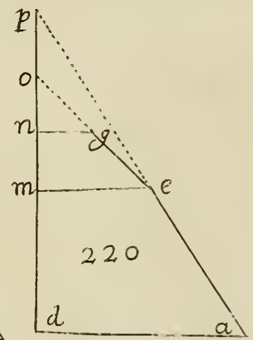

C
D
A
214
O
P
F
N
B
M
H


B
217
S
T
y
E
F
X
Z
G
K
M
N
V
O
Q
A
P
H
D
L
R
C


C
A
R
M
O
E
G
H
F
K
L
216
N
P
Q
B
D


B
S
T
E
F
M
N
218
A
D
O


P
O
N
G
E
M
219
A
D


p
o
n
g
m
e
220
d
a

Estque P D. P M [a]:: D A. M E [b]:: *da. me* [a]:: *pd. pm* [c]:: P D. P M. a 4. 6.
ergo dividendo P M. M D :: *pm.md.*, [b] item M D. M N :: *md. mn.* b hyp.
ergo ex æquo P M. M N :: *pm. mn* ; item ob M E. N G [b] :: *me. ng* ; c 11. 5.
[a]erit M N. M O :: *mn. mo.* ergo rursus ex æquo P M. O M :: *pm. om* ; [d]hoc est triang P M E. O M E :: triang *pme. ome.* item triang d 1. 6.
O M E. O N G [e]= M E. N G, bis [b] = *me. ng*, bis [e] = triang *ome. ong* ; ergo permutando triang O M E. *ome* :: triang O N G. *ong* [f]:: e 20. 6. f 19. 5.
trap M G. *mg* ; & rursus permutando triang O M E. trap M G :: triang *ome.* trap *mg* ; ergo ex æquali triang P M E. trap M G :: triang *pme.* trap *mg* ; quinimò similiter trap D E. triang P M E :: trap *de.* triang *pme* ; ergo denuo ex æquo trap D E. M G :: trap *de. mg.* *Q.E.D.*

Coroll. Trap D E. triang O M E *:: trap. *de.* triang *ome.* * 22. 5.

Lemma 2.

Si A. B :: D. E. & A. C :: D. F. Erit B. C :: E. F. & A. B -|- C :: D. E -|- F. Fig. 221.

Nam permutando B. E (A. D) :: C. F. & rursus permutando B. C E. F. Item B -|- C. E -|- F [a]:: (B. E ::) A. D. ergo permutando A. B -|- C :: D. E -|- F. a 12. 5.

Quòd si sit A. B -|- C :: D. C -|- F ; & A. B :: D. E. erit B. C :: E. F. & A. C :: D. F. Item si fuerit B. C :: E. F. & A. B -|- C :: D. E -|- F. Erit A. B :: D. E. & A. C :: D. F. Quæ ex simili rationum permutatione, inversione &c. facilè eliciuntur.

Prop. III.

*Si duarum portionum *similium (A B C, abc) sub recta, & parabola comprehensarum, utrique rectilineum inscribatur evidenter ; habeant verò inscripta rectilinea latera mutuò æqualia multitudine, centra gravitatum (Y, y) similiter secant diametros portionum (B D, bd).* Fig. 222. 223. * Not.

Angulos connectant rectæ E F, G H, K L, *ef, gh, kl* ; sintque Q, R centra trapeziorum A F, E H, & S compositi ex illis A H ; & similiter *q, r, s* sint centra ipsorum *af, eh, ah* : item sit X centrum compositi ex trapezio G L, & trigono K B L, & *x* ipsius *gl* -|- triang *kbl.* a 3 de qu par.
Jam ob A Dq. E Mq [a]:: B D. B M [b] :: *bd. bm* :: *adq . emq* ; erit A D. b hyp. & manif. hujus.
E M ([c]A C. E F) :: *ad. em* ([c]*ac. ef*). [d] ergo 2 A C -|- E F. 2 E F -|- c 15. 5.
A C :: 2 *ac* -|- *ef.* 2 *ef* -|- *ac.* hoc est M Q. Q D :: *mq. qd* ; ergo d 15. & 18. 5.

 com-

e 15.1.æquip. componendo M D. Q D :: *md. qd.* item B D. M D :: *bd. md.* itaque
f 12. 5. ex æquo B D. Q D :: *bd. qd*; paritérque B D. Mq :: *bd mq.* Simili
g 6 & 7 1 æquip. discursu B D. R M :: *bd. rm*; [f]quare B D. R Q :: *bd. rq.* Item R S.
h 1.lem. 2 huj. S Q[g]:: trap A F. E H[h]:: trap *af. eh* :: *rs. sq.* ergo ex æquo BD. SQ
k 2.lem. 2 huj. :: *bd. sq*; & [k] proinde BD. S D :: *bd. sd.* Simili discursu B D. BX
l cor.1 lem. 2 hujus. :: *bd bx*; & proinde B D.X S :: *bd. xs.* Quia verò trap A F. E H [h]:: *af. eh.* erit componendo A H. E H :: *ab. eh.* Item trap E H. G L [h]:: *ab. gl.* & trap G L. triang K B L[l]:: *gl. kbl.* ergo ex æquo A H. G L :: *ab. gl.* & A H . K B L :: *ab. kbl.* & [f] idcirco A H . G L + K B L[g](X Y. YS) :: *ab gl + kbl.* ([g]*xy . ys*). & cùm priùs fuerit B D. X S :: *bd. xs*; [k]erit B D. X Y :: *bd. xy*; [k] ideóque etiam B D. B Y :: *bd. by*; & B D. Y D :: *bd. yd.* ac denique dividendo B Y. Y D :: *by. yd.* *Q.E D.*

Not. Portionum similitudinem intelligit hic Author, non strictissimam, at latiore sensu, juxta quem omnia triangula, & omnes figuræ Analogicæ (in quibus nempe si diametri à vertice proportionaliter dividantur, per divisiones ductæ ordinatæ proportionales fiunt) sibimet assimilari dicantur; unde quævis duo parabolica segmenta similia esse supponit hic discursus; id quod probè, quò scrupuli tollantur, animadversum oportet.

Prop. IV.

Fig. 224. *Omnis portionis* (A B C) *comprehensa sub recta, & parabola, centrum gravitatis est in portionis diametro* (B D).

Si neges, esto E centrum portionis extra B D; ducatur E F ad B D
a 1. 6. parallela; sitque C F. F D :: C A. G A [a]:: triang CBA . triang GBA.
b cor. 20. de quad.parab. [b]tum portioni inscribatur figura evidens (quæ vocetur X), ita ut port
c 2 hujus. A B C—X ⊐ triang G B A. Inscriptæ autem figuræ centrum [c] sit
d 8. 5. H, & connexæ H E occurrat C K ad B D parallela. Estque X port
e priùs. A B C—X [d]⊏ triang A B C . port A B C—X [d]⊏ triang A B C.
f 10. 5. A B G ([e]:: C F. D E :: K E. H E.) Sit M E . H E :: X. port A B C
g 8. 1. de æqu. —X; quare M E. H E ⊏ K E. H E; & [f]ideo M E ⊏ K E, &
h 9 post.1.æqu. M [g]centrum reliquarum portionum erit extra sectionem. *Q.E.A.*

Coroll. Hinc si ex tota portione auferatur trigonum A B C, [g]centrum reliquarum portionum est in B D, & sic porro, ablatis aliis trigonis figuræ inscriptæ.

Lemma.

Lemma.

Si L R. R P $\sqsubset$ L S. S P erit L R $\sqsubset$ L S.

Nam componendo L P. R P $\sqsubset$ L P. S P. [a]ergo R P $\sqsupset$ S P. & proinde L R $\sqsubset$ L S. a 10. 5.

Inversè, ſi L R $\sqsubset$ L S. erit L R. R P $\sqsubset$ L S. S P.

Nam L R. R P [b]$\sqsubset$ L S. R P [b]$\sqsubset$ L S. S P. b 8. 5.

Prop. V.

Si portioni (ABC) *comprehenſæ ſub recta, & parabola, inſcribatur rectilineum* (A E B F C) *evidenter, totius portionis centrum gravitatis* (S) *propius eſt vertici portionis* (B), *quàm inſcripti rectilinei centrum* (R). Fig. 225.

Sit P centrum trigoni A B C, & reliquarum portionum A E B, C F B centra ſint M, N; trigonorum verò A E B; C F B centra ſint I, K, & connectantur M N, I K, G H; liquet O eſſe centrum port A E B + C F B. (quia hoc eſt in utraque [a]M N,[b]B D), & L eſſe centrum triang A E B + C F B; & quia A G = $\frac{1}{2}$ A B, & C H = $\frac{1}{2}$ C B, [c]erit D Q = $\frac{1}{2}$ D B; & D P ([d]$\frac{1}{3}$ D B) $\sqsupset$ D O; unde DP $\sqsupset$ DS (nam S [a]cadit inter O, P). Simili diſcurſu I G $\sqsupset$ M G; quare L P $\sqsupset$ O P: cùm itaque ſit L R. R P [e]:: triang A B C. triang A E B + C F B. [f]$\sqsubset$ triang A B C. port A E B + C F B [e]:: O S. S P [f]$\sqsubset$ L S. S P. [g]erit L R $\sqsubset$ L S; quare S eſt propius vertici B. *Q.E.D.*

a 6 cor 7. 1. de æquip.
b cor. 4. hujus.
c 2. 6.
d 3 cor. 14. 1 de æquip.
e 6 & 7. 1 de æquip.
f 8. 5.
g lemm præc.

Coroll. Similiter, quò figura inſcripta plura habet latera, eò centrum ejus propiùs ad verticem accedet.

Prop. VI.

Datâ portione (ABC) *comprehenſa ſub recta, & parabola, poſſibile eſt portioni rectilineum* (A E B F H) *evidenter inſcribere, ita ut recta* (SR), *quæ eſt inter centra gravitatum portionis, & inſcripti rectilinei minor ſit quâcunque rectâ propoſitâ* (Z). Fig. 226.

Sit B S. Z :: triang A B C. X; & [a]inſcribatur figura (A E B F C) evidenter (cujus centrum R), ita ut port A B C — fig AEBFC $\sqsupset$ X. Dico factum. a cor. 20 de qu. par.

Si fieri poteſt, ſit S R $\left.\begin{matrix}\sqsubset\\=\end{matrix}\right\}$ Z. éſtque port A B C. port A B C —

b 8. 5. c *hyp.* fig A E F B C [b] ⊏ triang A B C. X [c]:: B S. Z. ⊏ = } B S. S R. itaque si ponatur port A B C. port A B C—fig A E B F C :: T S. S R, erit

d 8. 1 *de æqu.* T S ⊏ B S; & T [d]centrum portionum reliquarum demptâ figurâ A E B F C erit extra B D, contra coroll. 4 hujus.

Breviùs. Quò figura inscripta plura habet latera, eò propiùs accedet ad verticem; proinde ad centrum ferè accedet, ex continuo laterum augmento.

Prop. VII.

Fig. 227. Fig. 228. *Duarum similium portionum* (A B C, M N O) *comprehensarum sub recta, & parabola, centra gravitatum* (E, Q) *in eâdem ratione secent diametros* (B D, N P).

Si negas, esto B H. H D :: N Q. Q P (ita nempe primò ut H cadat infra E). Portioni A B C [a]inscribatur figura A F B G C, cujus

a 6. *hujus.* centrum G, ita ut E G ⊐ E H; & huic *similis figura inscribatur

* *Not.* portioni M N O, cujus centrum sit T: & ob N Q. Q P([b]:: B H. HD)

b *hyp.* [c]⊏ (B G. G D[d]::) N T. T P; [c]erit N Q ⊏ N T, contra 5 hujus.

c *lemm. ad* 4 *h.* d 3 *hujus.* Quòd si dicas esse B K. K D :: N Q. Q P; & K cadere supra E; fiat NX.XP :: BE.ED [c]⊏ *B* K KD :: NQ.QP. [c]ergo NX ⊏ N Q; sic relabimur in primam hypothesin, quam absurdam demonstravimus.

Aliter breviùs. Cùm centra similium figurarum inscriptarum, si laterum numerus augeatur infinitè, in centra portionum desinant, & illarum centra proportionaliter dividant diametros, harum centra idem efficient.

* *Not.* Similes dicuntur inscriptæ segmentis figuræ, non juxta strictam illam, quæ initio sexti elementi definitur, similitudinem, sed propter similem inscribendi modum, qualis in apposito ad primam hujus manifesto, & in 21[a] *de quadr. parab.* describitur; quæ certè similitudo huic fundando ratiocinio sufficit. vid *Not.* ad 3 hujus.

Prop. VIII.

Fig. 229. *Cujuscunque portionis* (A B C) *sub recta, & parabola contentæ centrum gravitatis* (H) *dividit portionis diametrum* (B D), *ita ut pars ejus* (B H), *quæ ad verticem, sesquialtera sit partis* (H D) *quæ ad basim.*

Portioni inscribatur figura evidens A K B L C, & portionum A K B, C L B centra sint M, N; ac E centrum trigoni A B C; ducantur

cantur K L, M N, F G, sitque S X $= \frac{1}{3}$ B S $= \frac{1}{12}$ B D (ob B S[a] $= \frac{1}{4}$ B D). unde B X (B S + S X) $= \frac{1}{4}$ B D + $\frac{1}{12}$ B D $= \frac{1}{3}$ B D. Item E D[b] $= \frac{1}{3}$ B D; ergo X E $= \frac{1}{3}$ B D. Porro ob B D $=$ 4KF [c]erit B H $=$ (4K M $=$) 4S Q; ergo (sublatâ S Q) est B S + Q H $=$ 3 S Q $=$ 3S X(B S) + 3X Q; ergo Q H $=$ 3X Q. atqui 3. 1 [e]:: triang A B C. port A K E + C L B [f]:: Q H. H E. [g]ergo X Q $=$ H E; unde X E (B X, vel D E) $=$ 5H E; & X H $=$ 4H E, & H D $=$ 6H E. Liquet igitur fore B H. H D :: 9. 6 :: 3. 2. *Q.E.D.*

a *manif. hujus.* b *3 cor. 14 huj.* c *7 hujus.* d *conſt.* e *24. de qu. par.* f *6, & 7. 1 æqu.* g *9. 5.*

Coroll. B D. H D :: 15. 6 :: 5. 2.
B D. B H :: 15. 9 :: 5. 3.
B D. H E :: 15. 1.

Lemma.

Quotlibet AB, CB, DB, EB ∺; erunt excessus A C, C D, DE etiam ∺ in eadem ratione. Nam ob A B . C B :: C B. D B, erit divisim A C. C B :: C D. D B; & permutatim A C. C D :: C B. D B; item ob C B. D B :: D B. E B; erit divisim C D. D B :: DE. E B; permutandóque C D. D E :: D B. E B :: C B . D B. unde liquet fore A C, C D, D E ∺ in ratione C B ad D B, vel A B ad C B.

Corol. A D. D E :: A B + C B. D B :: C B + D B. E B, &c. 12, 16, 18, 5.

Prop. IX.

Si quatuor lineæ (A B, C B, D B, E B) *proportionales sint in continua proportione; & quam rationem habet minima ad excessum, quo maxima excedit minimam, hanc habens sumatur aliqua ad tres quintas excessus, quo maxima proportionalium excedit tertiam; quam verò habet rationem æqualis duplæ maximæ proportionalium, & quadruplæ secundæ, & sextuplæ tertiæ, & triplæ quartæ ad æqualem quintuplæ maximæ, & decuplæ secundæ, & decuplæ tertiæ, & quintuplæ quartæ, hanc habens accipiatur quædam ad excessum, quo maxima proportionalium excedit tertiam; simul ambæ sumptæ erunt duæ quintæ ipsius maximæ.* Fig. 230.

Sit E B. A E :: F G. $\frac{3}{5}$ A D; item 2A B + 4C B + 6D B + 3E B. 5A B + C B + 10D B + 5E B :: G H. A D; dico fore A B. F H :: 5. 2.

Nomi-

Nominentur L = 2AB + 4CB + 6DB + 3EB
M = 5AB + 10CB + 10DB + 5EB.
Q = 2AB + 4CB + 2DB.
R = 2AB + 4CB + 4DB + 2EB.
S = 2DB + EB.
T = CB + 3DB + 2EB.
V = 2AB + 3CB + DB.
X = AC + 3CD + 2DE.

a *cor. lemm. præc.* Ob AB + CB. DB [a]:: AD. DE; [b]erit 2AB + 2CB. 2DB :: (AD. DE [a]::) CB + DB. EB. [c]quare V. S :: AD. DE: fiat
b 15. 5. AD. DO :: R. S; quare inversè componendo erit AO. AD :: R +
c 12. 5. S. R; (hoc eſt L. R); item AD. GH :: M. L; ergo ex æquo perturbatè eſt AO. GH :: M. R [b]:: 5. 2. Porro, ob DO. AD :: S. R;
d *priùs.* & AD. DE [d]:: V. S; erit rurſus ex æquo perturbatè DO. DE :: V. R; quare inversè convertendo T (R — V). R :: OE. DE; item
e *cor. præc.* AC. CB [e]:: DE. EB [e]:: CD. DB [e]:: 3CD. 3DB [e]:: 2DE. EB; [c]adeóque X. T :: DE. EB; ergo iterum ex æquo perturbatè OE. EB :: X. R; componendóque OB. EB :: X + R. R; [c]item AC + CD. DE :: AB + CB. DB :: CB + DB. EB :: AB + 2CB + DB. DB + EB; ergo inversè componendo AE. AD :: AB + 2CB + 2DB + EB. AB + 2CB + DB [c]:: R. Q.
f 16, & 15. 5. [f]ergo R. $\frac{1}{5}$Q :: AE. $\frac{2}{5}$AD [g]:: EB. FG; erat verò priùs X + R.
g *hyp.* R :: OB. EB; ergo ex æquo OB. FG :: X + R. $\frac{2}{5}$Q (hoc eſt :: 3AB + 3DB + 6CB. $\frac{2}{5}$: 2AB + 2DB + 4CB) [b]:: 5. 2: atqui fuit AO. GH :: 5. 2; quare [c]junctim AB. FG :: 5. 2. *Q.E.D.*

Hæc concluſio ſic operosè monſtrata, poterit ita per operationes Algebraicas expeditiùs & liquidiùs oſtendi.

Sicut a, b, c, d ∺; & $d. a - d :: y. \frac{3a - 3c}{5}$ (quare $y = \frac{3ad - 3cd}{5a - 5d}$); & $2a + 4b + 6c + 3d. 5a + 10b + 10c + 5d :: z. a - c$ (quare $z = \frac{2aa + 3ab + 4ac + 2ad - 4bc - 6cc - 3cd}{5a + 10b + 10c + 5d}$).

Eſt ergo (ſummas iſtas conjungendo, fractionéſque, quibus conſtant, ad eandem denominationem redigendo) $y + z =$

10*aaa*

$$\frac{10aaa + 20aab + 20aac + {}^{*}20aad + 10abd - 20abc\ ({}^{*}-20aad) - 30acc\ (-30abd) - 20acd - 10bcd\ {}^{*}(10add)}{25aa + 50ab + 50ac - 50bd - 505d - 25dd}$$ * ob $bc = ad$ * ob $cc = bd$.

$$= \frac{10aaa + 20aab + 20aac - 20abd - 20acd - 10add}{25aa + 50ab + 50ac - 50bd - 50cd - 25dd} = \tfrac{2}{5}a.$$ (quod patebit, hujus æquationis partem utramque multiplicando per 5, & dividendo per 2, vel multiplicando per crucem). itaque conſtat.

Lemma.

In parabola A B C, ſint A C, D E ordinatim applicatæ ad diametrum B F; erunt portiones A B C, D B E inter ſe, ut cubi ſemibaſium F A, G D. Fig. 231.

Nam, connexis B A, B C, B D, B E; eſt port A B C. D B E [a]:: triang A B C. D B E [b] :: triang B F A. triang B G D [c] = F A. G D + B F. B G = F A. G D + [d] F Aq. G Dq [e] = F A cub. G D cub. *Q.E.D.*

a 24 *de quad. par.* & 15. 5.
b 15. 5.
c 23. 6.
d 3. *de qu. par.*
e 5. *def.* 6.

Prop. X.

Omnis fruſti (A D E C) *à parabolico ſegmento ablati centrum gravitatis eſt in recta* (G F), *quæ diameter eſt fruſti, hoc modo poſitum, æquiſectâ rectâ* (G F) *in quinque partes* (G L, L H, H K, K P, P F) *in media quinta parte* (H K); *ut ejus particula propior minori baſi fruſti ad reliquam partem eandem habeat rationem, quam habet ſolidum, baſin quidem habens quadratum quod ex majore baſium fruſti, altitudinem verò æqualem utrique ſimul & duplæ minoris baſis & majori, ad ſolidum, baſin quidem habens quadratum minoris baſis fruſti, altitudinem verò æqualem utrique & duplæ majoris baſis & minori ipſarum.* Fig. 231.

Dico ſi fuerit H I. I K :: 2 D E + A C × A Cq. 2 A C + D E × D Eq; foré punctum I centrum gr. fruſti A D E C.

Sint F B, Y B, G B, Z B ∺; & [b] fiat F H. I R :: F Z. Z B; éſtque F Bq. Y Bq [c]:: F B. G B [d]:: A Fq. D Gq; unde F B. Y B :: A F. D G. item F B cub. Y B cub [e] (F B. Z B) :: A F cub. D G cub; [f]:: port A B C. D B E; ergo dividendo F Z. Z B ([g] id eſt F H. I R) :: fruſt A D E C. D B E. Porro, D E. A C [h] (D G. A F) [k]:: Y B. F B. [l] quare D E. A F :: Y B. $\frac{1}{2}$ F B; & componendo D E + A F. A F :: Y B + $\frac{1}{2}$ F B. $\frac{1}{2}$ F B. & D E + A F. A C. [m] (hoc eſt, D E + A F × A Cq. A C cub) [l] Y B + $\frac{1}{2}$ F B. F B. Item A C cub; D E cub [n] ::

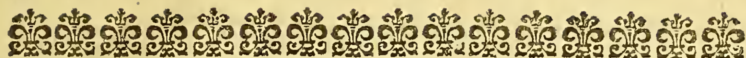
a 13, & 11. 6.
b 12. 6.
c 20. 6.
d 3. *de qu. par.*
e 33. 11.
f *lemm. præc.*
g *conſt.*
h 15. 5.
k *priùs.*
l 16, & 15. 5.
m 32. 11.
n *priùs. et* 15. 5

F *B*

[o 11.5.] FB.ZB; dein DE. AC [o] (YB. FB) [o] :: ZB.GB; ergo DG. AC :: ½ ZB.GB; componendóque DG. AC + DG :: ½ ZB. GB + ½ ZB; [l]unde DE. AC + DG [m](DE cub. AC + DG × DEq) :: ZB. GB + ½ ZB: quapropter ex æquo erit DE + AF × ACq. AC + DG × DEq [h] (hoc est 2DE + AC × ACq. 2AC + DE × DEq; ([g]hoc est HI. IK) :: YB + ½ FB. GB + ½ ZB; & componendo HK. IK :: YB + ½ FB + GB + ½ ZB. GB + ½ ZB [h] :: 2YB + FB + 2GB + ZB. 2GB + ZB. unde (antecedentes quintuplicando) FG. IK :: 5TB + 5ZB + 10YB + 10GB. 2GB + ZB. Item FG. FK [p](:: 5. 3.) :: [h] 5FB + 5ZB + 10YB + 10GB. 2FB + 2ZB + 4YB + 4GB; ergo (jungendo consequentes duarum proportionum (FG. IF :: 5FB + 5ZB + 10YB + 10GB. 2FB + 3ZB + 4YB + 6GB; vel inversè IF. FG :: 2FB + 4YB + 6GB + 3ZB. 5FB + 10YB + 10GB + 5ZB; Item IR. FH ([p]⅗ FG) [g] :: ZB. FZ; [r]ergo RF (IF + IR) = ⅖ FB; proindéque BR = ⅗ FB; adeóque BR. RF :: 3. 2; [s]unde punctum R est centrum gr. portionis ABC: sit Q centrum portionis DBE; itaque BQ. QG :: 3. 2; vel compositè BG. BQ :: 5. 3 :: BF. BR [t] :: FG. QR :: 5. 3 [p] :: FG. FH; [u]unde QR = FH; itaque demum [x] est QR. IR :: frust ADEC. port DBE; [y] quare punctum I est centrum gr. frusti ADEC. *Q.E.D.*

p *hyp.*
r 9 *hujus.*
s 8 *hujus.*
t 19. 5.
u 9. 5.
x *supr. cum* 7. & 11. 5.
y 6, & 7. 1 *æquip.*

DE



De Insidentibus Humido.
LIB. I.

Tractatus hic injuriâ temporis mutilus evasit, nec Græcè extat; Latinam versionem perpolivit Federicus *ille* Commandinus, *de literis hisce optimè meritus, quem sequimur* κατὰ πόδας. *Inscriptionem fuisse* περὶ τῶν ὀχουμένων *discimus ex* Strabone; *id est de iis quæ vehuntur, gestantur, feruntur, sustinentur, continentur, vel insident Humido; hæc enim omnia significat* τὸ ὀχεῖσθαι. *Agit verò de Humidi naturâ, figurâ, quatenus admittit corpora, vel attollit, quantâque vi resistit; quo situ in humido consistit, vel movetur portio sphæræ, quoque portio conoidis rectanguli, vel parabolici.*

Hypoth. I.

*Ponatur humidi eam esse naturam, ut partibus ipsius æqualiter jacentibus, & continuatis inter sese, minus pressa à magis pressa expellatur: unaquæque autem pars ejus premitur humido supra ipsam existente ad perpendiculum, si humidum * sit descendens in aliquo, aut ab alio aliquo pressum.*

** subsidat in uno, & ab alio prematur.*

Schol.

Ratio est, quia desuper incumbens pondus partibus humidi proximè subjectis motum sive conatum imprimit, & hæ sequentibus continuò ad fundum usque; ibi verò, quum ob præpotentem fundi resistentiam progredi nequeat motus, reflectitur, & in latera se diffundens, adjacentes humidi partes conturbat, atque extrudit. Ex g. pondus A (in fig. appositâ) premens subjectas humidi partes B, motum ipsis communicat, efficitque, ut à fundo C, ad modum inepto, ad partes Fig. 233.

tes

tes D, E resiliant, locúmque cedant deorsum nitenti corpori A. Ita mihi videtur accipienda, & explicanda hæc hypothesis.

Prop. I.

Fig. 234. *Si superficies aliqua plano secetur, per idem semper punctum* (A) *sitque sectio* (B C) *circuli circumferentia, centrum habens punctum illud* (A), *per quod plano secatur, sphæræ superficies erit.*

Nam ab A ad superficiem ducantur rectæ A B, A C utcunque, per quas transit planum; hoc in dicta superficie [a] producet circuli circumferentiam, cujus centrum A. [b] ergo A B, A C æquales erunt. Simili discursu omnes rectæ ab A ad superficiem ductæ æquales erunt. [c] quare superficies proposita est sphærica. *Q.E.D.*

a *hyp.*
b 15. *def.* 1.
c 1. *def.* 1 *Theod.*

Prop. II.

Fig. 235. *Omnis humidi consistentis, atque manentis superficies sphærica est, cujus sphæræ centrum est idem quod centrum terræ.*

Centrum terræ sit A. Per hoc secetur humidum plano quocunque, in quo ab A ad superficiem humidi ducantur utcunque rectæ AB, AC. Hæ si pares fuerint, [a] liquet B C esse circumferentiam circuli, & [b] proinde superficiem humidi esse sphæricam. Sin impares dixeris, centro A intra humidum ducatur arcus D E. ergo B D, C E [c] impares sunt, & inæqualiter premunt sibi subjectas humidi partes; [d] unde non consistet humidum, sed conturbabitur, contra hypothesin.

a 15. *def.* 1.
b 1 *hujus.*
c 5 *ax.* 1.
d 1 *hypoth.*

Prop. III.

Fig. 236. *Solidarum magnitudinum* (X Y) *quæ æqualem molem habentes æquè graves sunt, atque humidum, in humidum* (B A C) *demissæ demergentur, ita ut ex humidi superficie* (B C) *nihil extet, non tamen adhuc deorsum ferentur.*

Bisecetur angulus B A C rectâ A F, & centro A ducatur arcus D G E, intra humidum; & si dicatur aliquid solidi eminere, puta Y, liquet contentum spatio B D G F, unà cum Y, majus esse humido F G E C, & proinde illo plus ponderare (quum solidum X Y humido [a] æquè grave sit); quare pars D G magis premetur parte G E; [b] nec consistet solidum, donec X Y omnino immersum fuerit, tum vero quiescet, quum compressio ubique æqualis sit. *Q.E.D.*

a *hyp.*
b 1 *hypot.*

Prop.

Prop. IV.

Solidarum magnitudinum (X) *quæcunque levior humido fuerit, demissa in humidum non demergetur tota, sed aliqua pars ipsius ex humidi superficie extabit.* Fig. 237.

Fiat ut in præcedenti, & si dicatur tota X demergi, quoniam X [a] levior est humido, liquet id quod continetur spatio B D G F minùs ponderare humido F G E C, & proinde D G minus premi, quàm G E, [b] ideóque haud consistere humidum, donec aliquid ipsius X emineat. *Q.E.D.*

a hyp.
b 1 hypoth.

Prop. V.

Solidarum magnitudinum (X Y) *quæcunque levior humido fuerit, demissa in humidum usque eò demergetur, ut tanta moles humidi, quanta est partis demersæ* (X), *eandem quam tota magnitudo* (X Y) *gravitatem habeat.* vid. Fig. 236.

Si enim pars humidi æqualis demersæ X non æquè gravis sit, ac tota X Y, liquet id quod continetur spatio B D G F unà cum Y, & humidum C E G F non æquè ponderare; ergo D G, & E G inæqualiter premi, [a] ergóque humidum non manere, donec id eveniat. *Q.E.D.*

a 1 hypoth.

Prop. VI.

Solidæ magnitudines (A) *humido leviores, in humidum impulsæ, sursum feruntur tantâ vi, quanto humidum molem habens magnitudini* (A) *æqualem gravius est ipsâ magnitudine* (A). Fig. 238.

Sit X gravitas magnitudinis A, & X + Y gravitas humidi ipsi A æqualis. Adsumatur verò B, cujus gravitas sit excessus Y. Itaque demissâ A + B in humidum, [a] demergetur ejus pars, cui æquale humidum gravitatem habet, quantam tota A + B, [b] hoc est ipsam X + Y. at humidum ipsi A æquale [b] tantam habet. ergo pars demersa erit ipsa A. Constat verò A tantâ vi sursum niti, quantâ B deorsum premit; (neutra enim vis prævalet). atqui B deorsum fertur vi gravitatis Y, ergo A eâdem vi assurgit. *Q.E.D.*

a 5 hujus.
b hyp.

Breviùs. Excedat humidum tibi æquale solidum gravitate Y. ergo humidum vi solidum demergenti resistit gravitate, Y; quâ vi remotâ, sursum pellit A eadem vi.

Sch. Itaque gravia humido leviora, in ipso quasi absolutè levia evadunt, deperditâ propriæ gavitatis vi, & efficaciâ.

Prop. VII.

Fig. 239. *Solidæ magnitudines (A) humido graviores, demissæ in humidum ferentur deorsum, donec descendant; & erunt in humido tanto leviores, quanta est gravitas humidi molem habentis solidæ magnitudini æqualem.*

Quòd A deorsum feretur patet, quia partes ipsi subjectæ reliquis magis pressæ cedunt ipsi, locúmque dant. Porro humidi corpori A æqualis gravitas sit X, ipsius verò A gravitas sit X + Y. Liquet corpus A in humido existens sibi subjectas partes deprimere solâ gravitate Y, qua resistentiam subjecti humidi exuperat. Quòd si extra humidum esset, totâ gravitate X + Y ponderaret, ergo in humido existens levior fit quantitate gravitatis X. *Q.E.D.*

Aliter. Sit X + Y gravitas solidi A, & X gravitas ipsi æqualis humidi. Assumatur verò solidum B, cujus gravitas sit X, eíque æqualis humidi gravitas X + Y. Itaque composita A + B sibi æquali humido æquè grave est, (nam 2X + Y communis utriusque est gravitas). a 3 *hujus.* [a]Itaque A B in humido immota consistet. ergo [b] cùm B sursum nitab 6 *hujus.* tur impetu Y (quo ab humidi gravitate exceditur), eadem A deorsum feretur (æquipollent enim hæ vires, & altera alterius impedit effectum). unde liquet propositum.

Hypoth. II.

Ponatur eorum quæ in humido sursum feruntur, unumquodque * *& deorsum.* *sursum ferri secundum perpendicularem, quæ per centrum gravitatis ipsorum ducitur.

Lemma I.

Fig. 240. Fig. 241. Circuli se intersecent punctis E, F, quæ connectat recta E F. centra autem T, H jungat recta T H. hæc bisecat rectam E F ad rectos.

a 15. *def.* 1. b 8. 1. c 4. 1. Nam (ductis T E, T F, H E, H F) trigona T E H, T F H sibi mutuò [a]æquilatera sunt. [b]unde ang E T H = F T H. [c]ergo in trigonis E T K, F T K est E K = F K, & ang T K E = T K F. *Q.E.D.*

Lem.

Lemm. II.

In sphæræ portione centrum gravitatis est in axe portionis. Demonstratum hoc à *Commandino* de centro gr. prop. 15. & à *Luca Val.* lib. 2. prop. 34.

Prop. VIII.

Si aliqua magnitudo solida (A B C) *levior humido, quæ figuram portionis sphæræ habeat in humidum demittatur, ita ut portionis basis* (A C) *non tangat humidum; figura insidebit recta, ita ut portionis axis* (D B) *sit secundum perpendicularem. Et si ab aliquo inclinetur figura, ut basis portionis humidum contingat, non manebit inclinata, si demittatur, sed recta restituetur.* Fig. 242.

Inclinetur portio, & per axem B D, ac terræ centrum T transeat planum, faciens segmentum circuli A B C, cujus pars immersa sit E B F G. Jungatur E F, quem secet recta T H, connectens terræ ac sphæræ centra T, H, & quidem [a]ad rectos in K. [b]Estque centrum gr. *portionis E L F in L K, & portionis E M F in M K, & [c] proinde totius E L F M in L M, puta N. Portionis verò A B G centrum gr. [b]est in axe B D, puta in O. [d] Transitque recta N O per reliquæ extra humidum partis centrum gr. quod sit P; connectatur T P. Cùm igitur pars immersa [e]sursum feratur secundum rectam T N, pars verò extans deorsum secundum P T (neque hæ lationes sibi invicem ullatenus obsistant, utpote per alias, aliásque lineas peractæ) non quiescet portio, donec hæc centra cum centro terræ in unam rectam incidant, hoc est donec axis D B sit secundum perpendicularem. Tum verò quiescent, quia quanto impetu quæ in humido est pars sursum, tanto quæ extra deorsum per eandem lineam contendit.

a *lemma præc.* b * *ducto plano per* E F *ad* T H *perpendiculari.* c *cor. 7. 1 æqu.* d *8 æquip.* e *2 hypoth.* & *6 hujus.*

Not. Recta N P libram repræsentat, in qua duo gravia E B F G, A E G F C diversimodè ponderant (*levior est enim pars immersa illâ, quæ extat). Suspensio fit ex puncto O. Radii sunt O N, O P; descendit P, attollitur N; donec puncto O in T H constituto contingat æquilibrium. * *6 hujus.*

Coroll. Ex his, cùm corporis cujuscunque humido levioris pars alia demergatur, alia emineat, nunquam quiescet corpus, & fluctuare desinet, donec centra harum partium, totius, & terræ in una recta conveniant, quod si contingat, tum quidem consistet corpus.

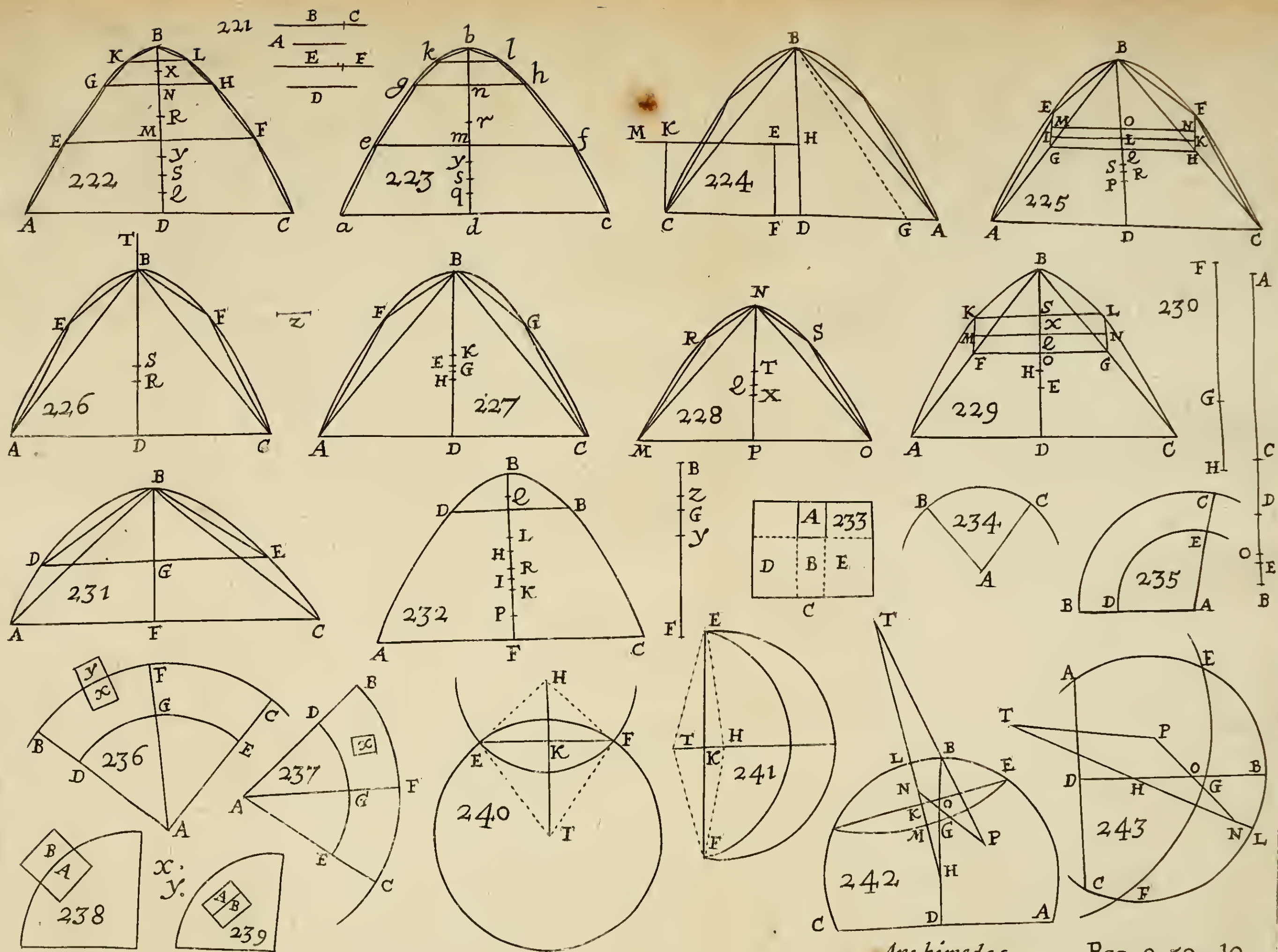
Prop.

Prop. IX.

Fig. 243. *Quod si figura* (A B C) *humido levior in humidum demittatur, ita ut basis tota sit in humido, insidebit recta, ita ut axis ipsius secundum perpendicularem constituatur.*

Invertatur figura præcedentis, & ex simili discursu constabit propositum.

DE


221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
Archimedes. Pag. 250. 10.



De Insidentibus Humido,

LIBER SECUNDUS.

Prop. I.

Si magnitudo aliqua (A B) *humido levior demittatur in humidum, eam in gravitate proportionem habebit ad humidum* (C D) *æqualis molis, quam magnitudinis demersæ pars* (B) *habet ad totam magnitudinem* A B. Fig. 244.

Sit humidi C D pars C = A [a](unde D = B), corporúmque trium A B, C, D gravitates sint X, Y, Z. [b]unde X = Z. ergo X . Y + Z [c]:: (Z. Y + Z *:: D. C + D ::) [d]B. A + B. *Q.E.D.*

a 3. *ax.* 1.
b 5. 1 *hujus.*
c 7. 5.
*
d *sch.* 7. 5.

Lemma I.

Sit conus Isosceles rectangulus A B C, in quo sectio parabola EDF, cujus vertex D, rectum latus R; erit A D = $\frac{1}{2}$ R. Fig. 245.

Nam B Cq [a]= (B Aq + C Aq = 2 B Aq ([b]ob B A = C A) =) 2 B A × C A. [c]& R . A D :: B Cq . B A × C A. ergo R . A D :: 2. 1. *Q.E.D.*

a 47. 1.
b *hyp.*
c 11. 1 *Apoll.*

Not. A D ab *Archimede* nuncupatur, ea quæ usque ad axem.

Lemma II.

Recta G Q tangens parabolen A B C diametro B D occurrat (M Q); in qua ubicunque sumatur K N æqualis ei, quæ usque ad axem; per contactum G ducatur G O parallela diametro, cui occurrat N O diametro perpendicularis; ducta K O tangenti G Q perpendicularis erit. Fig. 246.

Ducantur enim G Z tangenti, & G X diametro perpendiculares. Sitque R rectum latus parabolæ. Estque Q X × X Z [a]= (GXq [b]=) R

a *cor.* 8. 6. & 17. 6.
b 11. 1 *Apol.*

c 16. 6. R × X B. [c]ergo R . X Z :: (Q X . X B [d]:: 2. 1 [e]::) R . K N. ergo
d 35. *1 Apol.* K Z [f]= N X [g]= O G. [h] unde K O, Z G parallelæ sunt; & cum
e *Lemm. præc.* Z G tangenti G Q [k] perpendicularis sit, [l]erit K O eidem perpendicu-
f 7. 5. laris. *Q.E.D.*
g 34. 1.
h 33. 1.
k *const.*
l 29. 1.

Lemma III.

Centrum gravitatis dividit axem conoidis parabolici, ita ut pars ad verticem, ejus quæ ad basim sit dupla.

Demonstratum hoc à *Commandino*, libro de centro gravitatis, prop. 29. & à *Luca Valerio* lib. 2. prop. 41.

Prop. II.

Fig. 147. *Conoidis rectanguli recta portio* (A B C) *quando axem* (B D) *habuerit minorem quàm sesquialterum ejus* (K N) *quæ usque ad axem, quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demissa in humidum, ita ut ipsius basis* (A C) *humidum non contingat, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur. Rectam dico consistere talem portionem, quando planum, quod ipsam secuit, superficiei* (E F) *humidi fuerit æquidistans.*

a 12 *de conoid. & sphæroid.* Secetur conoides plano per axem [a] facienti sectionem A B C parabolam (quod in sequentibus semper concipiatur factum, quamvis
b 5. 2 *Apol.* brevitatis causa reticeatur) cujus pars submersa habeat diametrum
c 3 *Lem. præc.* G H. Sectionem verò tangat G Q ad E F [b]parallela. Portionis ABC
d *hyp.* centrum gr. sit K, unde K B [c]= $\frac{2}{3}$ D B [d]⊐ K N. Sitque L centrum
e 8. 1 *æquipond.* gr. partis demersæ, [e] unde in protractâ L K erit centrum gr. reliquæ
f 2 *lem. præc.* partis, quod sit M: ducatur N O perpendicularis ad H G, vel B D,
g 29. 1. & connectatur K O secans tangentem Q G in P; [f] & quidem ad re-
h 32. 1. ctos. Jam ob angulos [h]K G P, K Q P ([k] B I F) acutos, liquet per-
k 29. 1. pendicularem K P cadere inter G, & B; nec centra L, M existere in
l 2 *hyp.* 1 *huj.* rectâ K P; etsi ducantur L R, M S ad G Q, vel E F perpendiculares,
m *vid. cor.* 8. 1. *hujus.* [l]pars demersa sursum nitetur per rectam R L, pars extans deorsum secundum M S, tota portio A B C fertur juxta K P, [m] unde non consistet portio A B C, donec hæc centra incidant in axem B D. *Q.E.D.*

Prop.

Prop. III.

Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit minorem, quàm sesquialterum ejus quæ usque ad axem, quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demissa in humidum ita ut basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed ita restituetur, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat. Fig. 248.

Inversâ figurâ, simili planè discursu probatur, quo antecedens.

Prop. IV.

Recta portio (A B C) *conoidis rectanguli, quando fuerit humido levior, & axem* (B D) *habuerit majorem, quàm sesquialterum ejus* (K N) *quæ usque ad axem; si in gravitate ad humidum æqualis molis non minorem proportionem habeat eâ, quàm quadratum quod fit ab excessu* (B T), *quo axis major est, quàm sesquialter ejus* (K N) *quæ usque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe* (B D), *demissa in humidum, ita ut ipsius basis* (A C) *humidum non contingat, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur.* Fig. 249.

Præparatio imitatur præcedentem, similésque lineæ eidem literis designantur, (quod ferè fit in sequentibus.) Sit verò gravitas corporis A B C ad gravitatem humidi æqualis ut Y ad Z. Estque G Hq. B Dq [a]:: (port E G F. A B C [b]::) Y. Z [c] $=$ vel $\sqsubset$ B Tq. B Dq. [d] ergo G H $=$ vel $\sqsubset$ B T, [e] quare G L $=$ vel $\sqsubset$ B N. (nam ob B T $+ \frac{3}{2}$ K N [c] $=$ B D [f] $= \frac{3}{2}$ B K [g] $= \frac{3}{2}$ B N $+ \frac{3}{2}$ K N, ideóque B T [h] $= \frac{3}{2}$ B N. itémque G H [f] $= \frac{3}{2}$ G L, [k] erit G H. B T :: G L. B N). ergo G L $\sqsubset$ G O ([l] $\sqsupset$ B N). ergo punctum O est inter L, G. Nec centra totius portionis, & partium in eadem sunt linea, sed pars demersa [m] sursum tendit per R L, & altera deorsum per M S. unde non consistet portio A B C &c. ut in præced.

a 26. *de conoid. & sphæroid.*
b 1 *hujus.*
c *hyp.*
d 9 *vel* 10.5 & 22.6.
e 14 5.
f 3 *lem.* 1 *huj.*
g 1. 2.
h 3. *ax.* 1.
k 15. 5.
l 17. 1. *con. Apol.*
m 2 *hyp.* 1 *huj*

Coroll. B N $= \frac{2}{3}$ B T.

Prop. V.

Recta portio conoidis rectanguli, quando levior humido axem habuerit majorem, quàm sesquialterum ejus, quæ usque ad axem; si ad humidum in gravitate non majorem proportionem habeat, quàm excessus, quo quadratum quod fit ab axe, majus est quadrato, quod ab excessu, quo Fig. 250.

axis major est, quàm sesquialter ejus, quæ usque ad axem, ad quadratum quod ab axe; demissa in humidum, ita ut basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata non manebit inclinata, sed restituetur ita, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat.

a *26 de conoid. & sphæroid.* b *invertendo, et cor. 19. 5.* c *1. 2 hujus.* d *hyp.* e *9. vel 10. 5.* f *22. 6.*

Invertatur figura præcedentis, & stantibus quæ ibidem dicta sunt, quoniam B Dq. G Hq [a] :: port A B C. EGF; [b] erit B Dq — GHq. B Dq :: (port A B C—E G F. A B C [c]::) Y. Z [d] $=$, vel $\sqsupset$ BDq — B Tq. BDq [e] ergo B Dq—GHq $=$, vel $\sqsupset$ B Dq—B Tq. [f] quare B T $=$, vel $\sqsupset$ G H & deinceps, ut in præcedenti.

Lemma.

Fig. 251. In triangulo T D A si latus T D ita dividatur, ut sit T D. T I :: V D. Q I, ducantúrque per V & Q parallelæ ad D A, & I A, hæ convenient in latere T A.

Nam T D. T I [a]:: T V. (T D—V D). T Q (T I—Q I). ergo convertendo T D. I D :: T V. Q V. atqui I D. D A [b]:: Q V. V Y. (ob V Y ad D A, & Q Y ad I A parallelas) ergo ex æquo T D. D A :: T V. V Y. [c] ergo T Y A est recta linea. *Q.E.D.*

a *hyp. & 19. 5.* b *4. 6.* c *conv. 4. 6.*

2. Quòd si conveniant parallelæ in Y, erit T D. T I :: V D. Q I. Nam T D. D A [d]:: T V. V Y. & D A. I D [d] :: V Y. Q V. ex æquo igitur T D. I D :: T V. Q V. [f] ergo T D. T I :: T V. T Q :: V D. (T D—T V). Q I. (T I—T Q). *Q.E.D.*

d *4. 6.* f *19. 5.*

Coroll. T V. T Q :: V D. Q I.

Prop. VI.

Fig. 252. *Conoidis rectanguli recta portio* (A B C), *quando levior humido axem* (B D) *habuerit majorem quidem, quàm sesquialterum ejus* (K N) *quæ usque ad axem, minorem verò, quàm ut ad eam, quæ usque ad axem proportionem habeat, quam quindecim ad quatuor, in humidum demissa, adeò ut ipsius basis* (A C) *contingat humidum* (A F), *nunquam consistet inclinata, ita ut basis in uno puncto humidum contingat.*

Fiat ut in præcedentibus, & porro sit K V $= \frac{4}{5}$ D B; (unde cùm D K [a] $= \frac{2}{15}$ D B, erit D V $= \frac{9}{15}$ D B, & B V $= \frac{6}{15}$ D B, & proinde B V $= \frac{6}{9}$ D V $= \frac{2}{3}$ D V). Contingant G Q, A T occurrentes diametro T Q B D; ducantúrque V Y (sectioni occurrens in M, tangenti Q G in Y), N O, G X, H ω basi A C parallelæ.

a *3. lem. 1. 2 h.*

Jam

Jam si B D, B V, B X sint $\div\div$ (quod fortè contingere potest), [b] etiam D Aq, V Mq, X Gq erunt $\div\div$ in eadem ratione, [c] ergo D A, V M, X G erunt $\div\div$. Item B V. B X [d]:: B D. B V [e]:: D Aq. V Mq [f]:: DA. XG [g]:: D I. X Q (ob trigona A D I, G X Q similia). ergo permutando D I. B V :: X Q ([h] I ϖ, ob ϖ H [k] = X G). B X [l]:: 2. 1 [m]:: D ϖ (D I — I ϖ). V X (B V — B X) [l] :: T D. B D. Item (ob B D. B V [d]:: B V. B X. erit convertendo). B D. V D :: B V. V X. ergo ex æquo T D. V D :: D I. V X. & permutando T D. D I :: V D. V X. ac convertendo T D. T I :: V D. V D — V X, vel Q I. (Nam Q I [k] = G H [k] = X ϖ = V ϖ + V X = V ϖ + $\frac{1}{2}$ D ϖ = V ϖ + D ϖ — $\frac{1}{2}$ D ϖ = V D — $\frac{1}{2}$ D ϖ [n] = V D — V X). [o] ergo punctum Y est in T A. Porro, quia V D. X ϖ ([n] G H) *:: T V ([p] D B + B V). T Q ([q] D X). [r] erit V D. G H :: D B + B V — V D. D X — X ϖ. atqui D B + B V — V D = 2 B V [n] = D I. & D X — X ϖ = D ϖ. [s] ergo V D. G H :: D I. D ϖ [t]:: B V ($\frac{1}{2}$ D I). $\frac{1}{2}$ D ϖ ([n] V X, vel G Z). & permutando G H. G Z :: D V. B V [u]:: 3. 2. x unde punctum Z erit centrum portionis A G F, in hoc casu.

Quod si porcio major sit minórve, quàm ut B D, B V, B X sint $\div\div$, sit illa *a* B *c*, diametro B *d*, base *a c* ad A C parallelâ, ita ut submergatur portio *a* B *f*, diametro G *h*, base *a f* ad A F itidem parallelâ, cui occurrat tangens T A R, ducatúrque R S ad A C parallela, & occurrens diametro B *d* in S. Estque S V. D V y :: R Y. A Y y:: G *h*. GH. & permutando S V. G *h* :: D V. G H [u]:: B V. G Z. iterùmque permutando G *h*. G Z :: S V. B V [z] $\sqsubset$ *d* V. B V [u]:: 3. 1. quare in hoc casu centrum cadit inter *z*, & *h*; & proinde infra O in quocunque casu (quoniam K V $\sqsupset$ K N). Itaque cùm tota portio gravitet secundum rectam K O P. & pars quæ demergitur, quæque extat per alias, liquet solidum non consistere &c. ut in præcedentibus.

Coroll. B V = $\frac{6}{15}$ D B.

b 20 1 *Apol.*
c 22. 6.
d *hyp.*
e *priùs.*
f *cor.* 20 6
g *cor.* 4. 6.
h 4. 6.
k 34. 1.
l 35. 1. *Apol.*
m 19. 5.
* *cor. lem. præc.*
n *priùs.*
o *lemm. præc.*
p 35. 1 *Apol.* & 2. *ax.* 1.
q 35. 1. *Apol.* & 3. *ax.* 1.
r 19. 5.
s *schol.* 7. 5.
t 15. 5.
u *priùs.*
x 3 *lem.* 1. 2 *h.*
y *sch.* 2. 6.
z 8. 5.

Prop. VII.

Recta portio conoidis rectanguli, quando levior humido axem habuerit, majorem quidem, quàm sesquialterum ejus, qua usque ad axem, minorem verò, quàm ut ad eam, quæ usque ad axem proportionem habeat, quàm 15 ad 4, in humidum demissa adeò ut basis ipsius tota sit in humido, nunquam consistet ita, ut basis contingat humidi superficiem, sed ut tota in humido sit, & nullo modo ejus superficiem contingat. Fig. 253.

Inversâ figurâ, eodem modo demonstratur quo antecedens.

Prop. VIII.

Fig. 253. 254. *Conoidis rectanguli recta portio* (A B C), *quando axem* (BD) *habuerit majorem quidem, quàm sesquialterum ejus* (K N) *quæ usque ad axem; minorem verò quàm ut ad eam, quæ usque ad axem, proportionem habeat, quam 15 ad 4: si in gravitate ad humidum habeat proportionem minorem ea, quam quadratum, quod fit ab excessu* (BT) *quo axis major est, quàm sesquialter ejus quæ usque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe; demissa in humidum, ita ut basi ipsius* (A C) *humidum non contingat, neque in rectum restituetur, neque manebit inclinata, nisi quando axis* (B D) *cum superficie humidi* (E F) *angulum fecerit æqualem ei, de quo infra dicetur.*

Sit gravitas portionis ad gravitatem humidi ut Zq ad B Dq [a] ⊐ B Tq. B Dq. [b] itaque Z ⊐ B T, [c] & $\frac{2}{3}$ Z ⊐ B N ([d] $\frac{2}{3}$ B T). Sit N φ = $\frac{2}{3}$ Z. & erigatur φψ = $\sqrt{\frac{1}{2}}$K N × B φ, junganturque B ψ, erit angulus φ B ψ, is quem propositio innuit. Nam 1. sit ang φ B ψ = ang E I D, vel G Q X. Estque KN . XQ [e]:: KN × XQ. XQq [f]:: G Xq. X Qq (nam K N × X Q [g] = (K N × 2X B [h] = 2K N × X B [k] =) G Xq) [l]:: φψ q. B φ q (ob [m] similia trigona Q X G, B φ ψ) [n]:: $\frac{1}{2}$ KN × B φ. B φ q [c]:: $\frac{1}{2}$ K N. B φ [c] :: K N. 2 B φ [o]:: K N. X Q [p] ergo 2B φ = X Q. & X B ([g] $\frac{1}{2}$ X Q) = B φ. unde X N = φ N [m] = $\frac{2}{3}$ Z. Cúmque sit G Hq. B Dq [q]:: (port E G F. A B C [r]::) Zq. B Dq, & propterea G H [s] = Z, erit $\frac{2}{3}$ G H ([t] G L) [c] = $\frac{2}{3}$ Z [u] = φ N [x] = G O [y] = G L. & centrum L cum O coincidet. quare centra portionum sunt in perpendiculari K P, & [z] proinde tota portio immota consistet.

2. Quòd si ang φ B ψ ⊐ ang X Q G, fiat ang X Q Y = ∠ φ B ψ. Estque K N . X Q ([a]:: G Xq . X Qq) [b] ⊏ Y Xq . X Qq [c]:: φ ψ q. B φ q [d]::) K N. 2 B φ. [e] unde X Q ([f] 2X B) ⊐ 2B φ. [g] & B X ⊐ B φ quare N X (G O) ⊏ (N φ = [h] $\frac{2}{3}$ Z = [k] $\frac{2}{3}$ G H) [l] = G L. Cadit igitur punctum O intra centrum L: nec sunt centra portionum in una recta K P. unde tota portio non consistet.

3. Quòd si ang φ B ψ ⊏ X Q G, simili discursu ostendetur punctum O cadere supra L. [z] unde etiam consequetur motus portionis A B C, quomodo sæpius inculcatum.

a *hyp.* b 10. 5. (6. & 22. c 15. 5. d *cor.* 4. 2 *h.* e 1. 6. f 7. 5. g 35. 1 *Apol.* h 16. 6. k 11. 1 *Apol.* & 1. *lem.* 1. 2 *h.* l 4. 6. m *constr.* n *constr.* & 7. 5. o 11. 5. p 9. 5. q 26. *de conoid. & sphæroid.* r *hyp.* & 1. 2 *h.* s 9. 5. t 3. *lem.* 1. 2 *h.* u *constr.* x 34. 1. y 1. *ax.* 1. z *sch.* 8. 1 *huj.*

a *priùs. suprà.* b 8. 5. c 4. 6. d *ut supra.* e 10. 5. f *priùs.* g 15. 5. h *constr.* k *supra.* l *hyp.* z. *vid. cor.* 8. 1. *hujus.*

Prop. IX.

Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit, majorem quidem quàm sesquialterum ejus, quæ usque ad axem; minorem verò quàm ut ad eam quæ usque ad axem proportionem habeat, quàm 15

quàm

ad 4, & in gravitate ad humidum proportionem habeat majorem, quàm excessus, quo quadratum quod fit ab axe majus est quadrato, quod ab excessu, quo axis est major, quàm sesquialter ejus, quæ usque ad axem, habet ad quadratum quod ab axe, in humidum demissa adeò ut basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata, nec convertetur ita ut axis ipsius secundum perpendicularem sit, nec manebit inclinata, nisi quando axis cum superficie humidi angulum fecerit æqualem angulo similiter ut prius assumpto.

Nam inversâ figurâ præcedentis, quoniam B Dq. G Hq [a]:: port A B C. E G F, [b] erit B Dq—G Hq. B Dq (:: port A B C—E G F. A B C [c]:: Zq B Dq) [d] $\sqsubset$ B Dq—B Tq. B Dq [e]quare B Dq—GHq (—Zq) $\sqsubset$ B Dq—B Tq. *ergo Z $\sqsupset$ B T. & $\frac{2}{3}$ Z (Nq) $\sqsupset$ $\frac{2}{3}$ BT (N B) &c. ut in præcedenti.

a 26 *de conoid.*
b *cor.* 9. 5. & 4. 5
c *hyp.* & 1. 2 *h.*
d *hyp.*
e 10. 5.
* 17. *ax.* 1.

Schol. Sit I K axis parabolæ G I C, ejusque basis G C = 2 G K. & educatur G N, utcunque secans parabolam G B A. Ordinatim applicetur N P, & connectatur G P occurrens ipsi B D in O: à quo applicetur O H ordinatim. Sintque R, S recta latera sectionum G I C, G B A. Súntque tam I K, K G, R, quàm B D, B G, S in ÷÷. unde cùm I K. K G :: B D. D G. erit I K. R :: B D. S. & permutando I K. B D (I G. B G, vel I P. B O) :: R. S. atqui I P, N P, R, & B O, H O, S sunt etiam ÷÷. ergóque I Pq. N Pq :: (I P. R :: B O. S ::) B Oq. H Oq. ergo permutando I P. B O :: G P. G O ::) N P. H O. unde sectionis punctum H est in recta G N. & hinc

Fig. 256.

1. *Coroll.* G N. G H (G P. G O) :: G I. G B :: (G K. G D) :: G C. G A. & G H. H N :: G A. A C :: G B. B I :: G D. D K.

Porro, ducatur N M ad I K parallela. Estque G C. G A :: (G N. G H :: G M. G K :: M C. A K. & permutando G C. M C :: G A. A K :: L K. H K. item G C. G K :: 2. 1 ::) L K. L I. ergo G C. M C + G K :: L K. H K + L I. ergo G C. K M :: L K. I H. vel G K. K M (:: G H. H N, vel G A. A C, vel G D. D K) :: L I. (I K). I H. Hinc

2. *Coroll.* L K. H K :: G A. A K. & dividendo L H. H K :: G K. A K. Et simili discursu

E X. X B } :: G K. A K :: L H. H K.
l y. y h. }

Porro, quia L I. I H :: G A. A C. erit inversè componendo I H. L H :: A C. G C. Item L H. H K :: G K. A K. atqui I H. H K = I H. L H (A C. G C) + L H. H K (G K. A K)

3. *Coroll.* I H. H K = A G. G C + G K. K A.

Quòd si base K G fiat altera parabola G I K, similis prioribus, similiter

ler erit $\left\{\begin{matrix} XB.\ BZ \\ yh.\ hi \end{matrix}\right\} = AG.GC + GK.KA = IH.HK.$

Prop. X.

Fig. 257. Fig. 258

Recta portio (A B C) *concidis rectanguli, quando levior humido habuerit axem* (B D) *majorem quàm ut ad eam* (K N) *quæ usque ad axem proportionem habeat, quàm* 15 *ad* 4, *in humidum demissa, ita ut basis ipsius* (A C) *non contingat humidum; nonnunquam quidem recta consistet, nonnunquam inclinata; & interdum adeò inclinata, ut basis ipsius in uno puncto contingat superficiem humidi; idque in duabus dispositionibus, interdum quidem ita ut basis in humidum magis demergatur, interdum verò ita ut superficiem humidi nullo modo contingat, secundum proportionem quam habet ad humidum in gravitate. Eorum quæ dicta sunt singula inferiùs demonstrabuntur.*

a *hyp.*

Sit gravitas portionis ad gravitatem humidi ut Zq ad B Dq; sitque $BK = \frac{2}{13} BD$; & $KV = \frac{4}{15} BD$, & K N ($\sqsupset$ ²KV) ea quæ ad axem; & $DT = \frac{3}{2} KN$.

b *constr.*

1°. Si Zq. B Dq non $\sqsupset$ B Tq. B Dq. quoniam BT [b] $= BD - \frac{3}{2} KN$, in humidum demissa portio A B L non nisi recta consistet, juxta 4 hujus.

c *vid. sch. 5. de quad. parab.* d *ibid.* e 4. 6. f *corol. 6. 2. b.* g 15. 5. h *priùs.* k 3 *cor. sch. 5 de quadr. parab.* l 20. *def.* 5. m

Pro sequentibus jungatur A B, quam secet V ϛ ad B C parallela. Item bisecta A B in μ, ducantur ϛ γ, $\mu\nu$ ad B D parallelæ: tum ad basibus ad A C diametrisque ϛ γ, $\mu\nu$ [c] describantur parabolæ A ϛ α, A μ D; quarum A ϛ α [d] transibit per K, (nam D A. V ϛ (D γ) [e] :: BD. B V [f] :: 15. 6. & dividendo A γ. γ D :: 9. 6 [g] :: 3. 2 [b] :: B D. B K). Producatur N ϵ ad D A parallela, occurrens sectioni A ϛ α, punctis δ, ϵ. per quæ ducantur $\theta\delta\zeta$, $\kappa\epsilon\lambda$ ad B D parallelæ. Estque A α. α C :: 4. 10 :: 2. 5. (nam posito $AC = 10$, vel $AD = 5$, erit A γ, vel $\gamma\alpha$ [h] $= 3$, & $\gamma D = 2$, unde $D\alpha = 1$, & $\alpha C = 4$. itaque $\theta\delta.\ \delta\varpi$ ($C\alpha.\ CA + AD.\ D\alpha$) [h] $= 2.5 + 5.1$ [l] $= 2.1$ [m] :: $\kappa\epsilon.\ \epsilon\xi$. denique ducantur tangentes $\theta\varphi$, $\kappa\psi$.

Conclusio 2.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate minorem quidem proportionem habeat, quàm quadratum* B T *ad quadratum* B D, *majorem verò quàm quadratum* $\theta\varpi$ *ad quadratum* B D, *demissa in humidum adeò inclinata, ut ipsius basis* (A C) *non contingat humidum, inclinata consistet, ita ut basis superficiem humidi nullo modo contingat, & axis* (B D) *cum humidi superficie* (E F) *angulum faciat majorem angulo* (φ).

Nam

Nam quia Zq. B Dq. $\left\{ \begin{matrix} ^{a}\sqsubset \theta\varpi q. BDq \\ \sqsupset BTq. BDq \end{matrix} \right.$, [b]erit Z $\left\{ \begin{matrix} \sqsubset \theta\varpi \\ \sqsupset BT. \end{matrix} \right.$ quare si a *hyp.* b 10. 5.
inter sectiones A B C, A μ D aptetur ad B D parallela recta G H [c]$=$ c *corol.* 8. 2 *h.*
Z, cadet hæc inter B D, & $\theta\varpi$: per H ducatur recta A F, quæ humidi superficiem repræsentet. Itaque G H est diameter demersæ portionis A G F. ducatur tangens G Q, sitque G L $= \frac{2}{3}$ G H, ([d]unde L est d 3 *lemm.* 2 *h.*
centrum portionis A G F), ducatúrque L K M, [e]sic ut M sit centrum e 8. 1 *æquip.*
partis extantis, & ob G L [f]$=$ 2 L H, erit G O $\sqsupset$ 2 O H, quare O ca- f *constr.*
dit supra L; & cùm portio A B C [g]feratur juxta rectam K O, pars g 2 *hypoth.* 1. *h.* & 2 *lem.* 1. 2 *h.*
demersa attollatur per illi parallelam L R, altera deprimatur secundum M S; quiescat tandem, ut humidi superficies sit E F, eique parallela tangens X Y, constátque esse ang X Y B [h]$\sqsupset$ ang Q [h]$\sqsupset$ ang φ. h 16. 1.
Q.E.D.

Concl. 3.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate eam habeat rationem, quam quadratum* $\theta\varpi$ *ad quadratum* B D, *demissa in humidum inclinata adeò, ut basis ipsius non contingat humidum, consistet & manebit ita, ut basis* (A C) *in uno puncto humidi superficiem* (Aϖ) *contingat, & axis cum superficie humidi angulum faciat angulo* φ *æqualem. Quod si portio ad humidum in gravitate eam proportionem habeat, quàm quadratum* $\kappa\xi$ *ad quadratum* B D, *in humidum demissa, & posita inclinata adeò, ut basis ipsius* (A C) *non contingat humidum; consistet inclinata, ita ut basis in uno puncto humidi superficiem contingat, & axis cum ea faciat angulum angulo* ψ *æqualem.*

Nam 1°. $\theta\varpi$ ([a]Z) est diameter portionis A B *f*, ejusque centrum a *cor.* 8. 2 *huj.*
[b]est δ (ob $\theta\delta$ [c]$=$ 2 $\delta\varpi$), & si per K δ ducatur recta, [c]hæc per tria b 3 *lem.* 1. 2 *h.* c 2 *lem.* 1. 2 *h.*
centra transibit, & secundum ipsam tota portio, ipsæque partes ferentur, [d]ergo immota consistet portio. Estque ang $\varphi =$ ang A $\varpi\zeta$ (ob & 2 *hypoth.* 1 *h.* d *sch.* 8. 1 *huj.*
$\theta\varphi$, A ϖ, & $\theta\varpi$, B D parallelas). Quòd si portio in alio situ constituatur, centrorum situs immutabitur, neque in una recta convenient, unde commovebitur portio, donec in hunc situm restituatur. Simili discursu, si Zq. B Dq :: $\kappa\xi$q. B Dq, erit $\kappa\xi$ ($=$ Z), diameter portionis submersæ, & tota portio consistet sub angulo $\psi =$ A $\xi\lambda$ &c.

Concl. 4.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate majorem quidem proportionem habeat, quàm quadratum* $\kappa\xi$ *ad quadratum* B D, *minorem*

verò

verò quàm quadratum $\theta\delta$ ad quadratum BD; *in humidum demissa, & inclinata, adeò ut ipsius basis* (AC) *non contingat humidum consistet, & manebit ita, ut basis in humidum magis demergetur.*

Simili ferè discursu probatur, quo secunda conclusio inter parabolas ABC, AμD aptando GH (= Z;) quæ in hoc casu cadet inter
a *hyp.* & 10.5. $\theta\varpi$, $\kappa\xi$, quia $Z^2 \left\{ \begin{array}{l} \sqsupset \theta\varphi \\ \sqsubset \kappa\xi \end{array} \right\}$. Eritque tum (in situ AGF) GO $\sqsubset$ 2OH, & propterea punctum O cadit inter centrum L, & H; neque consistet humidum in illo situ, sed quum basis magis demergitur.

Concl. 5.

Fig. 239. *Si portio* (ABC) *ad humidum in gravitate proportionem habeat minorem, quàm quadratum $\kappa\xi$ ad quadratum* BD; *demissa in humidum, & posita inclinata adeò ut basis ipsius* (AC) *non contingat humidum, consistet inclinata, ita ut ipsius axis* (BD) *cum humidi superficie angulum faciat* (Q) *minorem angulo ψ, & basis* (AC) *nullo modo superficiem humidi contingat.*

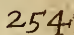
Probatur itidem ut 2[da], aptando rursus GH = Z, & hic in situ AGF erit GO $\sqsupset$ 2OH, & punctum O cadet inter centrum L, & verticem G. itaque ut consistat, inclinari debet.

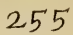
Liquet verò in hoc casu positâ EF superficie humidi consistentis, GH diametro portionis EGF, GQ ad EF parallelâ, esse ang Q $\sqsupset \psi$.

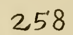
Nam si ang Q $\sqsubset \psi$, [a]erit idcirco punctum Q inter B, & ψ, [b] & punctum G inter B, & κ. [b]unde GO $\sqsubset \kappa\epsilon$. Atqui $\kappa\epsilon$ [c]= $\frac{2}{3}\kappa\xi$ [d] $\sqsubset \frac{2}{3}$GH = $\frac{2}{3}$Z. unde GO $\sqsubset \frac{2}{3}$GH. [e]unde O non erit centrum portionis EGQ. quare portio ABC non consistet, contra hypothesin.

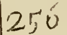
a 16. 1.
b *ex.* 35.1 *Apol.*
c *supra.*
d *constr.*
e 3 *lem.* 1. 2 *h.*

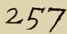
FINIS.

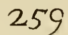












Archimedes. Pag. 260 12.



Lemmatum ARCHIMEDIS, *quæ vocantur, Editio Nova.*

PRÆFATIO.

HÆC مأخوذات *Machudât*, ſive *Lemmata Archimedis*, quorum pars magna uſum habet atque elegantiam, nè penitùs interirent inter *Motawaſſetát* متوسطات i.e. libellos inter Elementa *Euclidæana* grandémque *Ptolemæi* Syntaxin medios, (quos *Alexandrini* jam olim μικρὸν Ἀστρονόμον appellitabant,) adſervare maluerunt *Arabum*Mathematici: quod præter præfationem *Abi'lHaſan*,duo Codices Bibliothecæ *Bodleianæ* nimio ſatis comprobant. De *Græcis* tamen minùs emendatis quingentis penè abhinc annis *Arabica* fecit Vir Cl.*Thabetus Corraides.* Poſtea Notis ſuis nè vix adornavit is quem dixi, *Abu'lHaſan*(vel *Abu'lHonein*,ut aliqui volunt proclivi errore) *Ali Ebn Ahmed Naſvæus* ابو الحسن علي بن احمد النسوي. Quinetiam Latinè nunc ea leguntur ex duplici verſione, alterâ quidem Celeberr. V. D. *Johannis Gravii*, quæ cum animadverſionibus pauculis *Sam. Foſteri* Prælectoris *Greſhamenſis* ſæculi hujuſce devergentis anno L IX. *Londini* prodiit, mox alterâ *Abrahami Ecchel-*

lensis, quam suis adnotatis illustravit, atque adeò *Florentiæ* edidit egregius Mathematicus *Alf. Borellus.* Valdè autem miror virum præclarum alterumq; planè *Siciliæ* decus, de istorum Lemmatum Authore tam anxiè disputare: dummodo constat, ut nihil certius, Lemma omnium primum illud esse quod ad Tactiones *Apollonianas* suo ex ingenio posuit *Pappus*: tum quartum quintúmve nè vix ab eis differre, quibus Theorematum Floridorum Conditor Propositionem ἀρχαίων sed nulli certo Authori redditam (hanc in Lemmatum horunce sextum ita conjectam hodiéq; legis) illustratam voluit, nim. *Prop.* XIV. & XVII. *Arabes* autem, quibus *Archimedis* nomen in Mathesi præ cæteris clarius fuit notiúsque, vocabula ipsa ἄρβηλον & σελήνιον (*Lem.* 4. & 15.) summo viro retulere; quanquam *Pappus*, cujus fortean de scriptis *Eutocius* (sic amat) pleraque hæc Lemmata carpserat, simpliciùs paulò dixerat, χωρίον ὃ δὴ καλοῦσιν ἄρβηλον: de voce alterâ certa est fides diu ante *Archimedem* natum apud Geometras valuisse. *Opus potius esse mixtum reor, atque ab uno vel altero Theoremate sive *Archimedis* sive *Apollonii*, (talia enim ultrò inducit Doctrina Tactionum,) certè perantiquo, cæteris omnibus, ut audent scioli, hominis pænè Divini nomen additum inscriptúmque. Lemmatum verò suorum libellum scripsisse olim *Archimedem* nullus putem aut voluisse. Isthæc ita præcipuæ modò Propositioni præmittere solet, modò ἐπὶ τέλει subjicere. Quod ad quartum alterius libelli περὶ σφ. καὶ κυλ. conqueritur *Eutocius*, minus innuit quàm viro docto perplaceat: plerisque puta Exemplaribus Operum *Archimedis* binorum Lemmatum tam ἀνάλυσιν quàm σύνθεσιν, quas ad *Prop. IV.* pollicitus erat, malè excidisse; tum duo illa Theoremata (plura nè cogites) quæ fortè repererat *Eutocius* adeò fuisse propter Scribam malehabita, corrupta & defor-

*Ii homines huic etiam tribuerunt libellum, qui erat Zenodori *de Isoperimetris*, imò fragmentum de Statica, atque alia.

deformia, ut pro *Archimedéis* accipere quæ erant *Archimedis*, omninò ſubvereretur. Sed præfari multis haud decet. Breviculus enim ex ſe liber iſte eſt, & hoc compendio adhuc brevior.

Id verò ſubmonendum puto, Schemata quæ heic vides ab Autographis Præſtantiſſimi viri D. *Jac. Golii* fuiſſe expreſſa; ſive in meliores codd. incidit ille, quàm *Abr. Ecchellenſis* atque ego vidimus, ſive potiùs ingenio ac eruditione ſuis plus maximo potuit. Verùm de tanto viro, déque filii ejus erga me meritis tum dicam quæ ſentio ipſe, & omnes ſcire oportet, quando adhuc alia quàm ſtricturas ſcripſero & Epitomas.

[illegible]

[illegible]

[illegible]



Archimedis Lemmata.

Lemma I.

B*Inorum circulorum* A B C, D B E, *sese intra extrave tangentium in* B *diametri* AC,DE *invicem parallelæ sint; recta linea est quæ per* A D B *transit.* Fig. 260. 261.

Adjunctæ rectæ [a]F G B æquidistet [b]D H. Jam propter æquales H F[c], D G[d], G B, necnon [d]F A, F B; erit H A = [e]F G = [e]DH, & [f]A D H = A. Atque ob pares [g]B G D, B F A, D H A, erunt [h]B D G + B = A + A D H = 2A, & B D G[k] = A. Unde [l]A D G + A [g] = 2 rect = A D G + G D B. Recta igitur [m]linea est A D B. Aut in fig. alterâ, Unde [l]A B G + A(=[n]F B D + H D B) [g] = 2 rect = A B G + (B D G[f]) G B D, & A B D[m] recta est.

a 11, 12, 3. b 31. 1. c 34. 1. d 15. *def.* e *ax.* 3, 2. f 5. 1. g 29. 1. h *cor.* 32. 1. k *ax.* 7. l *ax.* 2, 1. m 14. 1. n 15, 29. 1.

Notæ.

Hoc lemmate *Prop.* XXIV[am] Operis *Apollonii* περὶ ἐπαφῶν jam olim illustrabat *Pappus*, ut videre est *Prop.* CX. LVII[mi] *Συναγωγῶν*. Commonstrat verò (connexis radiis G B, F B, & ipsis G D, F C invicem parallelis) tam F B G quàm A B D rectas esse, apodixi probâ quidem (contra quam putat Vir doctus,) & eleganti. Ecce illam!

Est enim ductâ tangente O P, G B O [o] = recto [o] = O B F, atque [n]G B F recta. Et, quia [p]D G. G B :: B F. F A, & D G B [g] = B F A, erit [r]G B D = F B A. Recta autem est G F, ergo [s]A B D etiam recta.

o 18. 3. p *def.* 15. *et* 7. 5. r 6. 6. s *sch.* 15. 1.

Consimile autem Lemmation Cl. *Comandinus* Propositioni XIV. Libri Quarti Collect. *Pappi* addidit, ut opus fuit, quod vide. Verùm id jam obiter monitum velim, Propositionem illam XIV *Pappi* eandem omninò fuisse (sic reor) cum XXIV[ta] Geometræ *Pergæi* de

Tactionibus, atque adeò utramque minimè differre abs horum Lemmatum Quinto; omnes equidem ipsas eadem Lemmatia, Illustrationes easdem, ut probè constent, exposcere.

Casum duntaxat facillimum exposuit *Abu'lHasan*, parùm quidem peritè, ubi A D B, F G B diametris A C, E D rectè insistant, nempe (H—A) A D H + recto H D G + G D B (G—B) = 2 rectis. recta igitur ipsa A D B.

Lemma II.

Fig. 262. *Si semicirculum* A B C *à puncto* D *tangant rectæ* A D, D B, *& deducatur* B E ⊥ A C : *connexa* C D *ipsam* B E *bifariam secabit in* F.

a 31. 3. & 13. 1
b 18. 3. & 28. Occurrant invicem [b] C B, A D protractæ in G, & jungatur A B.
c cor. 36. 3. Quia (ob pares [c] A D, D B,) A B D sive [d] B A D + D B G
d 5. 1.
e 29. 1. et 4. 6. = recto G B A [a] (A B C) = [g] B A D + G, erit G B D [k] = G, &
f 14. 5. [l] G D = (D B [h] =) A D. Atqui propter parallelas A D, E B, erit
g cor. 32. 1. DA . FE [e] :: (DC . CF ::) GD . BF. Quare [f] E F = F B.
h ut modò.
k ax. 3.
l 6. 1.

Notæ.

1. Paria heic peccavit Adnotator *Nasvæus* atque in præcedente Theoremate; scil. è casubus summè obvium adduxit, quando Cathetus B E ad centrum circuli A B C pertineat.

2. Hinc, ut bene monet Cl. *Borellius*, investigare licet duo polygona ordinata & similia, quorum circumscriptum inscriptum excessu quidem minori dato quovis superet, tum etiam rationem diametri ad circuli peripheriam compendio egregio eruere. Nam C E. C A :: B E. (A G) A D + D B; hoc est, perimeter polygoni circulo A B C ex semilatere B E inscripti, ad perimetrum duplo laterum numero ex latere ipso A D + D B circumscripti. Chordas verò per seq. Lemma, atque etiam proportionem licet inter A C & C E magis semper magisque minuere, eóque rationem diametri A C ad semichordam B E elicere. Quippe hinc datur B Eq, & huic par A E * E C, imò datur per Lemma, quod sequitur, ipsa A E. quare E C datur, atque etiam recta A D + D B. Idcirco ad peripheriam circuli (quæ quidem inter adscriptorum polygonorum ambitus mediat,) ratio diametri illicò emicat.

3. Horum Lemmatum Compilator, quisquis fuerit *Græcorum*, aut Scholiastes fortè *Arabs*, rectas A D, D G pares esse jubet, suo quasi fretus opusculo de Rectangulis, quod jam pridem periit. Istud tamen ex Elementis facillimè constat.

Lemma

Lemma III.

In circuli segmento A B C, *à quovis curvæ puncto* B *ad basin* A C *agatur perpendicularis* B D, *fiantque* D E = D C, *&* *arcus* B F = B C : *annexa* F A *erit æqualis ipsi* A E. Fig. 263. 264. 265.

Jungantur C B, B F, F E, E B. Est igitur E F B [c] = F E B, propter æquales rectas F B[a], (B C) [b]B E. Sed A F B + (A C B[b]) G E B [d] = 2 rectis [e] = A E B + C E B. Quare [f] A F B = AEB, & (A F B — F E B) A F E = A E F. Unde [g] A E = A F.

a 29. 3.
b hyp. & 4. 1.
c 5. 1.
d 22. 3.
e 13. 1.
f ax. 3.
g 6. 1.

Schol.

1. Hujus egregii Theorematis Casus secundus, ubi A B C est semicirculus, *Cl. Ptolemæo* rectas olim circulo applicanti pernecessarius erat. Lemma tamen, quod τὸ κατ᾽ ἀποτομίαν appellatur, cap. ix. Libri Primi Μεγ. Συντ. hâc occasione non constat modò, sed & generale evadit.

Datis scil. tam chordis quàm arcubus C A, A F, F C, adeoque semiarcu B C, quæritur ipsa B C chorda. Demissâ B D ⊥ A C, habes, ut prius, $D C = \frac{E C}{2} \left(\frac{A C - A F}{2}\right)$. D verò rectus est, & B C D ex dato arcu (A C — C B) B A, etiam datus. Quare specie datur (per 40. Dat.) triang B D C. Dantur igitur ratione (3 def. Dat.) sed & magnitudine (2. Dat.) rectæ B C, C D. Fig. 264.

2. Rursum socors esse mavult *Abu'lHasan*; (istum enim δείξεως pravatæ insimulandum reor) & præter Authoris *Græci* ingenium, omissis reliquis casum medium ostentare.

Lemma IV.

Super A C *ejusque segmenta* A D, D C *describantur tres semicirculi* A B C, A E D, D F C, *&* *fiat* D B ⊥ A C : *erit figura* (A B C F D E A) *trium semicirculorum peripheriis interclusa, quam* Ἄρβηλον *vocat Archimedes, circulo circa* B D *æqualis.* Fig. 266.

Nam A Dq + D Cq + (A D × D C Bis[a]) [c] D Bq [b] = A Cq. Suntque [c]circuli inter se, ut quadrata diametrorum. Quocirca [d] semicirculus A B C æquatur circulo circa diametrum B D, una cum

a cor. 13, 17. 6.
b 4. 2.
c 2. 12.
d ax. 7.

binis

e ax. 3. binis ſemicirculis A E D, D F C: unde [e] Arbelon *Archimedeum*, hoc eſt, ſemicirculus A B C minus ſemicirculis A E D, D F C par omninò erit circulo circa B D deſcribendo.

Notæ.

1. Cl. *Borellus* iſta verbis ſuis adnotat.

" Hæc forſan eſt una earum propoſitionum quas *Pappus* legit in " libro antiquo de menſura *Arbeli*, ſeu ſpatii à tribus ſemicircumfe- " rentiis circulorum comprehenſi, ut ait *Proclus:* quæ quidem ele- " gantiſſima eſt, ejuſque inventionis Lunulæ *Hippocratis Chii* origi- " nem extitiſſe puto. Eſt enim *Hippocratis* Lunula ſuperficies plana " à quadrante peripheriæ circuli majoris, & ſemiſſe peripheriæ cir- " culi ſubdupli comprehenſa. Arbelus verò recentiorum eſt ſpatium à " triente & à duobus ſextantibus circumferentiarum trium circulo- " rum æqualium comprehenſum; & hiſce duobus ſpatiis facilè qua- " drata æqualia reperiri poſſunt. At Arbeli *Archimedis* & *Procli* huc- " uſque reperta non eſt quadratura; ſed poteſt quidem aſſignari cir- " culus prædicto ſpatio æqualis. *Vide jam Viëtam in Reſponſis.*

2. Huic figuræ nomen dedit, ut par erat, cultellus ſeu ſcalprum Sutoris, quâ formâ ſemper fuit. Unde pervetus Gloſſa, Ἄρβηλον, Sicila: & Etymorum Græcanicorum conſarcinator, Ἄρβηλον, σμίλιον σκυτικὸν περιφερές· ἔστι δὲ καὶ ὅπλον. Imò ante iſtos Scholiaſtes *Nicandri* paulò diſertiùs, Ἄρβηλοι δὲ λέγονται κυκλοτερῆ σιδήρεια, οἷς οἱ σκυτοτόμοι τέμνουσι καὶ ξέουσι τὰ δέρματα. Hæc tamen obiter; alia jam me Matheſis diſtinet. Interpreti autem Arabi اربلوس *Arbelus* dicitur tanquam de virilis generis voce *Græcâ.*

3. Hoc quartum Theorema ex *Pappi* inventis fuiſſe exiſtimo, quo ad propoſitionem ſequentem, quæ ſubtiliſſima eſt & Sene *Siculo* digna, via certior ampliórque pateret: nec adeò *Hippocrati Chio* Meniſcos quadrandi cauſam dediſſe aliquam, quin ipſum potiùs abs antiquiſſimo illo Tetragoniſmo quàm opportunè ortum fuiſſe. Ait enim *Pappus*, quamprimùm expoſuerat Antiquam illam Propoſitionem, quæ proximum Lemmatum *Archimedæorum* facit, & quidem paulò ante decimum quartum Floridorum Theorematum Libri ſui Quarti, (quod minimè diſcrepat ab hoc Lemmatio,) —Δειχθήσεται δὲ τὰ πρότερον λαμβανόμενα.

Lemma

Lemma V.

Super A C *ejusque segmenta quævis contigua* A D, D C *describantur tres semicirculi* A B C, A E D, D F C, *sitque* D G ⊥ A C: *pares invicem erunt circuli* B H E, L F N, *qui Arbelo* A B C D *inscripti, tam perpendicularem* G D *quàm semicirculos contingant in punctis* H E B, L F N. Fig. 267.

Duc diametrum H I: hæc autem [a]æquidistet A C, ob [b]rectam D H I [c]= A D H, atque connexa B I ⊢ I A [d]recta est. Tum conveniant A B, D G in G, convenient etenim [e]propter B A D ⊢ A D H < 2rectis: adjuncta B H ⊢ H C, & recta est, & ad [f]A G perpendicularis, atque [d] I E ⊢ E D, & A E ⊢ E K etiam rectæ. Est autem [c]G D ⊥ D A, & juncta C K ⊥ K A, quare producta C K G recta erit. Quoniam verò E D ∥ C G, propter rectos [f]A E D, A K C, erit [g]A D. I H :: (A G. G I ::) A C. C D. adeoque [k]A D × D C = A C × I H, & argumento pari A D × D C = A B × L M. Æquantur igitur inter se diametri I H, L M, & [h]circuli ipsi I E H, L F M. *Q. E. D.*

a 28. 1.
b 19. 3.
c *hyp.*
d *lem.* 1.
e 29, 32. 1.
f 31. 3.
g 2. 6.
h 2. 12. *ult.* 1.
k 16. 6.
l *v. schol.* 1.
n 27. 3.
o 32. 1.
p 14. 1.

Scholia.

1. Sive *Græcus* ille, qui hæc Lemmata primus collegit, sive potiùs *Arabum* aliquis, quo C G rectam lineam esse ostenderet, citat Opusculum suum de Trigonis Rectangulis. Inde verò *Ali Abu'lHasan* hoc adjumenti accepit. *v. fig.* 271. (*sive schema primum Borelli, ad paginam.* 393.)

B C ⊥ A G, quod in triang A B C per F occursum perpendicularium B E, C D transit. Junge D E. Circulus A D F [f]ibit per E, ob rectum [c] A E F. Æquantur autem [n]D A F, D E F, atque [n]D E B, D C B, hoc est, B A G, D C B, & B communis est. Unde [o]A G B (C D B), [c]= recto A G C. Recta [p]igitur est C B, sive in schemate *Archimedeo* C G.

2. Deinde Adnotator *Nasvæus* cæteros casus hujusce quinti Theorematis ad mentem *Abi Sahl Cùhensis*, percelebris Mathematici, hoc ferè modo exponit. Fig. 268.

Casus secundus. Vel semicirculi A P N, O P C se mutuò secent in P. Sitque D P ⊥ A C: æquales invicem erunt circuli H E B, M F L, qui semicirculos & perpendicularem contingunt.

Fig. 268. Æquidiſtant H I, A C, & agantur A B, A H K [a] tranſeuntes per
a *lem.* 1. I, E. atque conveniant A G & D P in G. Dein jungatur recta [b] C K
b + K G, & I N + C B [a] tranſeuntes per E, H.
c 31.3 : 28.1. Propter parallelas [c] C K N I, eſt [d] C A. C N :: (A G. G I ::) A D.
d 2.6. H I. adeóque [e] C N × A D = C A × H I. Verùm C D × D O =
e 16.6. [f] D Pq = A D × D N, atque [c] C N. D A :: (N D. D O ::) [g] C N.
f *cor.* 13.17.6. O A. Quare [e] C D × O A = D A × C N [h] = C A × H I. Pariterq;
g 19.5. C A × L M = C D × O A. Unde æquantur & diametri L M, H I,
h *ut priùs.* & circuli [k] M F L, H E I.
k *ult.* 1 : 2.12.

Caſus tertius. Vel ſemicirculos jam disjunctos A E N, O F C tangant partes rectæ D F, D P: æquantur circuli H E B, M F L, qui tam ſemicirculos quàm perpendicularem à tangentium occurſu (D) erectam contingunt in punctis E, B, H, & F, R, L.

Æquidiſtent A C, H I, L M diametri, & jungantur C B, I N, rectæque A H K, C G tranſeuntes per H, E, & K; quia [c] C G || C N, erit [d] A D. H I :: (A G. G I ::) A C. C N, adeóque A D × C N = A C
l 36.3. × H I. Ac pariter C D × A O = A C × L M. Eſt autem [l] C D × D O = (D Qq = D Pq) A D × D N, atque C D. A D :: (D N.
m 18.5. D O ::) [m] C N. A O. Quocirca A D × C N [c] = (C D × O A) [h] = A C × H I = A C × L M = C D × O A. Pares igitur invicem ſunt diametri L M, H I, circulique [k] L F M, H E I.

Lemma VI.

Fig. 270. *Circuli* E F B, *qui tres ſemicirculos ſuper* A C, A D $= \frac{r}{s}$ D C, *&* *ipſam* D C *deſcriptos contingit, diameter* G H *diametro* A C *æquidiſtet; quæratur autem proportio diametrorum ad invicem.*

Ductis rectis A G, G B, C H, H B, H E, E A, G F, F C, item D G, D H, D I, D K, G L O, H M P, erit G O ⊥ A O, & H P ⊥ A C.

Et (propter H G, D K, D I || A C, A B, C B) erit O P. P C :: G M. M C :: A D. D C :: A L. L H :: A O. O P :: O P. P C, hoc eſt, $\frac{r}{s}$ P C. P C.

Unde aggregatum ex 3 continuè proportionalibus,
$\frac{r^2 PC^2}{s^2 PC} + \frac{rPC}{s} + PC. \frac{rPC}{s}$ :: A C. P O = G H.

Ex.

Ex. gr. (sic enim vult Arabs) sit P C = 4. Erit O P = 6, O A = 9, adeóque diam. A C . G H :: 19 . 6.

Adnotata in Lemma V & VI.

§ 1. Lemmatum *Archimedis* quod putant, quintum ex *Pappi* inventis assumptísque transcriptum est, quâ arte illustrius esset id quod sequitur.

Præmonet adeò, priusquam ostenderet principem illam veteremque propter quam appellitat ex vett. membranis, Libro *IV*. Floridorum *Prop. XIV*. eisdem positis quæ in Schemate nostro 270, & ab α deductâ $\alpha\,\mu$ ⊥ A C & = G O, esse μ D . ½ H G :: A D — D C . A D + D C.

Rectæ etenim sunt [a] A E H, G E D, C F G, D F H; similiáque trig. [b] D E A, D O G, itemque D H P, D F C, quare A D . D E :: G D . D O, & A D O = E D G: pariter D C . D E :: H D . D P, & C D P (= HDE = EDG) = ADO. a Lemma 1. b 31, 3. 32, 1. & 4. 6.

Unde AD . DC :: PD . DO. & componendo convertendoque AC . AD—DC :: PO = GH . PD—DO :: Pμ = ½ G H . ½ PD — DO. *Q. E. D.*

Syntheorema 1. Tum propter sim. trigona D O G, (DEA,) HPA, erit D O . O G :: H P . P A, & D O × P A = G O × P H = HPq = Q: $\alpha\,\mu$.

2. Imò, quia C D . D A :: O D . D P. erit componendo tam AD . AC :: PD . PO & diam. AD × (PO) GH = PD × AC. quàm CD . AC :: OD . PO. & diam. CD × (PO) GH = DO × AC.

§ 2. Deinde *prop. XVII. l. 4.* quæ decimam sextam ejusdem adjuvat, ut D H q . H I q :: A C . C D. Ponantur eadem quæ in Figurâ 267. fiatque I O ⊥ A C, Rectæ gr. sunt [n] H E A, I E D, & propter ea C A × A O = [a] (coeuntibus D, P.) A D q. [b] A C. (A C — A D) D C :: A D . (A D — A O) D O = H I :: (ob sim. trigona [c] A E D, H E I) D E . E I :: [h] D E q . E H q :: [f] D H q . H I q. a per preced. b 17. 6 : 19. 5. c 34. 1. est. d 4. 6. e 31. 3 : 29. 1.

Est etenim propter I H D [i] rectum, & [k] H E ⊥ D I; [g] D E . E H :: H E . E I :: D H . H I. f 22. 6. g 8. 6.

Hinc statim constat horum Lemmatum quintum, viz. [l] AC . DC :: ⊙ circa D H . ⊙ circa H I pariter, A C . A D :: ⊙ circa D H . ⊙ circa L M. Æquanturque [m] circuli ad H I, L M. Quod ex *Pappo* comprobatum volui. h 20. 6. i 18. 3. k 31. 3. l 12. 2. m 19. 5. n Lem. 1.

§ 3. Propositio autem illa Antiqua & *Archimedea*, quam vocant, talis erat referente *Pappo lib. 4. prop. XVI.*

Tres semicirculos in spatio *Arbelico* tangat circulus G F H, ipsum verò binósque semicirculos alter circa N etiam tangat, atque ita porro. Erit $\alpha\mu = GH$, & $QN = 2RI$, &c. juxta naturalem numerorum seriem. (Ponantur ea quæ in Schem. 270.)

1° Æquantur [a] C A O, P A D, atque A C P, O C D, unde [b] AD. A C :: A O. A P, necnon A C. C D :: O C. C P. Quare, [d] A O. (P A—A O) O P :: A D . D C [c] :: O P. P C, & [e] $OPq = AO \times PC$ [a] $= Q{:}\alpha\mu$. Ergo [f] $\alpha\mu = (OP)$ [g] $= GH$.

2. Et, quia [h] $\frac{2}{1} = \frac{\alpha\mu + GH}{GH} = \frac{NQ}{RI}$, erit $QN = 2RI$. Et sic deinceps.

a § 1. *sch.*
b 16. 6.
c 17. 5.
d 19. 5.
e 17. 6.
f *ult.* 1.
g 34. 1.
h 15. *Papp. l.* 4.

3. Quinimò si fuerint A C, D C in fig. 267. inter se sicut numeri quadrati, [i] erit D H commensurabilis diametro H I, aliàs non. Nam per § 2 universè, $\frac{AC}{CD} = \frac{DFq}{HIq}$. Sit igitur $\frac{AC}{CD} = \frac{4}{1}$, erit $DF = 2HI$: pariter $QN = 3RI$, &c. juxta vulgatissimam numerorum consequentiam.

i 9. 10.

4. Quæ est *Pappi* propositio *XVIII.* Manifestum etiam est, si circuli *f*, *g*, *h*, & semicirculos A D E, A B C, séque invicem tetigerint, fueritque Cathetus *fn* æqualis radio, fore $go = 2gi$, & $hp = 5hq$, &c. juxta numeros deinceps impares. Nam per § 3. $\frac{fn + 2fn}{diam.} = \frac{go}{2gi} = \frac{3}{2}$, & $go = 3gi$, &c. (vide fig. 282. sive illam *Pappi* ad *XVIII. pr. lib.* 4.)

Lemma VII.

Fig. 272. *Circulus* A B C *quadrato* A C *circumscriptus duplus est inscripti circuli* E F G.

Ductâ [a] etenim diametro E G ∥ B C, erit diam. B Dq [b] $= (2BCq)$ 2 E Gq, & circulus circuli duplus.

a 34. & *ult.* 1
b 47. 1.
c 2. 12.

Adnotat *AbulHasan Nasvaus*, tanquam ex libello quem de Circulo fecit, tritum illud,

Vis $\frac{r}{s}$ polygoni sive circuli dati E H G. Habes latus aut diame-

trum

trum E G, & $\frac{r}{s}$—E G, necnon (per 13. 6.) quadratum par rectangulo $\frac{EG^2 r}{s}$. unde, E G. $\frac{EGr}{s}$ :: E G². $\frac{EG^2 r}{s}$ :: [e] circulus datus quæsito :: per 20. 6.

Lemma VIII.

In circuli secante A C *statuatur* B C *par radio, & per circuli centrum* D *agatur* C E : *arcus* A E *triplus est ipsius* B F. Fig. 273.

Ductis enim E G || A B, radiisque D G, D B : erit D G E [a] = D E G $\left(\frac{GDF}{2}\right)$ [c] = C [a] = F D B [d] = ⅓ G D B, & arcus B F [e] = (⅓ B G) [f] ⅓ A E, ob A G E [c] = G A B. unde constat propositum.

Alf. Borell. hoc fermè modo. Adjunctâ E B, erit (B D C) [a] C = 2 D E B [a] (E + E B D) : unde A B E [b] = C + E [s] = 3 E, & arcus A E [c] = 3 B F.

Quod in hoc theoremate ponitur, datæ peripheriæ τειχοτομίαν, quod vides, inducit, atque ita Geometriam planam, ut ritè construatur, omninò superat. Id tamen facili opere præstat *Solida*, multóque adhuc plura *Linearis* quam vocant.

Lemma IX.

In circulo binæ quævis chordæ A B, C D *sese ad angulos rectos secantes, intercludunt arcus* A D + C B, *pares arcubus* A C + D B. Fig. 274.

Agatur diameter E F || A B, est igitur G D [a] = G C, A E [b] = B F, & A E + A D [c] = E C. unde semicirculus C F + E A + A D = C F + F B + A D [e] = A C + D B.

a 3. 3.
b *cor.* 26, 3. & *constr.*
c *cor.* 28. 3.
d *ax.* 1. *def.* 17.
e *ax.* 7.

Lemma X.

Circulum A E B *tangant rectæ* C A, C B, *secent verò* C D, *& huic parallela* B E, *& connexa* A E *secanti* C D *conveniat in* F : *Cathetus* F G *bisecabit ipsam* E B. Fig. 275.

Junge A B, est igitur C A B [a] = (A E B) [b] A F C, & D communis utrique triang [b] C A F, A H C ; unde [c] F C. C A :: C A. CH,

a 32. 3.
b *constr.* 29. 1.
c 32. 1 : 4. 6.

&

d 17.6. & [d] F C · C H = C Aq [e] = C Bq. Quia [f] verò F C. C B :: C B,
e cor. 36. 3. & < [g] D communis, erit < [g] C F B = [g] (C B H [h] = G A B [k])
f cor. 17. 6. A F C. Sed (C F A) F E B [k] = F B E [b] (C F B), angulíque [l] ad G re-
g 6. 6. h 5. 1. ĉti, atque latus G F commune; quare E G [l] = G B.
k ax. 1.
l 26. 1.

Lemma XI.

Fig. 276. *Circuli diameter* A F *poteſt quadrata ex ſegmentis binarum chordarum* A B, C D, *ſeſe ad angulos rectos ſecantium in* E.

a ax. 12 31.3. Jungantur A C, A D, C F, D B. Propter A E D [a] = A C F, &
b 27. 3. A D C [b] = A F C, erit C A F [c] = D A E, & tam curva quàm re-
c cor. 32. 1. ĉta C F [d] = D B. Unde AFq [f] = C Fq [e] (D Bq) + A Cq, hoc
d 26, 29. 3. eſt, [f] D Eq + E Bq + A Eq + E Cq.
e ult. 1.
f 47. 1.
g cor. ult. 6.

Schol.

Ali Naſvæus hoc modo: annexis A D, D B, B C. In triangulo D E B, E = recto [c] = B + D, & arcus D A + B C [g] = ſemicirculo. Poteſt ideò diameter utraque [d] D Aq + B Cq, hoc eſt, quadrata ex A E, E D, E B, E G.

Lemma XII.

Fig. 277. *Semicirculum tangant* C D, D E, *rectaque* C G *tranſeat per* F *interſectionem ſubtenſarum* D B, E A, *qui tactus* D, E, *& diametri terminos* A, B *connectant. Erit* C G ⊥ A B.

a 31. 3. Junge D A, E B. Erit ang. [a] rectus A D B [b] = D A B + D B A
b cor. 32. 1. [a] = B E F. Et (C D B) [d] D A B + A B F + F B E = D A B +
c 2 ax. (C E F) [d] A B E [c] = B E F + F B E [b] = D F E [c] = C D B + C E F.
d hyp. & 32. 3. Unde C F [f] = C D: atque eſt D A G [d] (C D F [g] = C F D) +
e ax. 1. D F G = 2 rectis = [a] recto (A D F) + F G A. Quare [k] C G ⊥
f ſchol. A B.
g 5. 1.

Schol.

1. In Demonſtratione ut pares ſint C F, D C, provocatum eſt ad opuſculum, quod hodie nuſquam eſt, *de Tetrapleuris*: ſupplet tamen
h 13. 1. τὸ ἐλλιπὲς *Abu'lHaſan* Adnotator hunc in modum.
k 10 def. 1. Vis C F > D C — C H. Eſt igitur (connexis D H, H E,) C D H
l 16. 1. [g] ſeu D H C [k] > D F C, & C E H ſive C H E [l] > C F E: quare

D H E

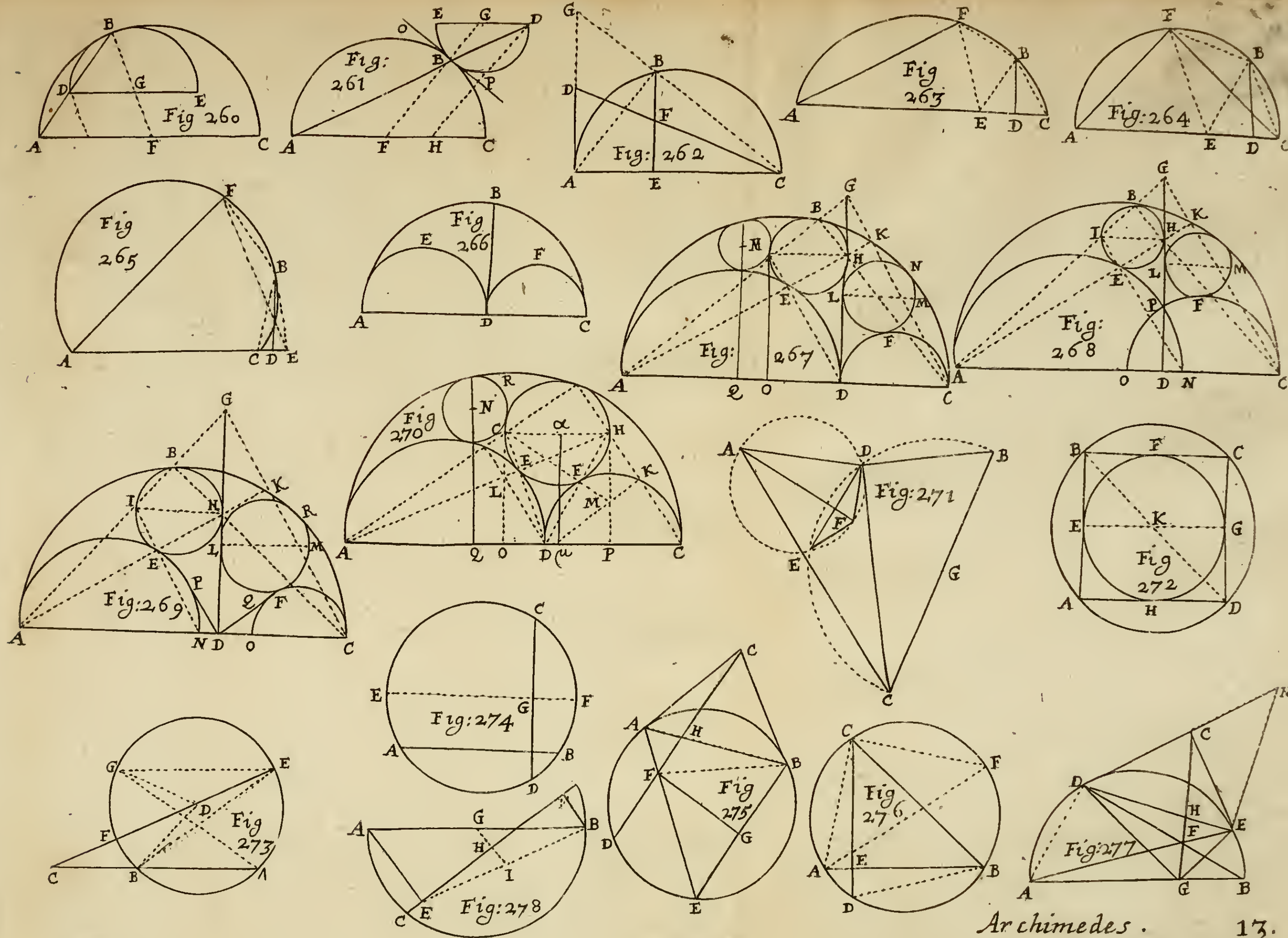


Fig 260
Fig: 261
Fig: 262
Fig 263
Fig: 264
Fig 265
Fig 266
Fig: 267
Fig: 268
Fig: 269
Fig 270
Fig: 271
Fig 272
Fig 273
Fig: 274
Fig 275
Fig 276
Fig: 277
Fig: 278

D H E = C D H + C E H majore C D F + C E F, pars toto: Rursum ais C F < D C = C G. Erit pariter (jungenti D G, G E,) D G E, hoc est, C D G + C E G minor C D F + C E F, totum parte. Ergo C F = C D.

2. *Cl. Borellius* Methodo idem directâ commonstrat, hâc puta.

Fac C N = C E, & adjunge N E. Anguli igitur [m] plani N D F E valent quatuor rectos, atque anguli [n] oppositi E F D (CDF + CEF) + N [g] (C E N) = F D N + F E N = 2 rectis. Quare circulus ex centro C (ob [o] C N = C E = C D) plano N E F D circumscriptilis [p] auferet [q] C F = C D. m *sch.* 32. 1. n *ax.* 3. o 19. 3. p 22. 3. q *def.* 15.

Lemma XIII.

Catheti A E, B F, *à diametri circularis extremis* A, B *cadentes, exsecante à diametro* C D *segmenta* C E, F D *invicem æqualia auferunt.* Fig. 278.

Junge E B, & per centrum G adige G I ∥ A E, quæ bisecat [a] C D & æquidistat ipsi B F. Erit (ob A G = G B) E I [b] = I B, & E H [b] = H F. Et H D (H C) minus H E æquales ipsi F D [c] = F E. a 3. 3: 30. 1. b 2. 6. c *ax.* 3.

Lemma XIV.

Super A B *ejusque paria segmenta* A C, D B, *atque sub intersegmento* C D *describantur quatuor semicirculi, & per* E *centrum circulorum* A F B, D G C *pertrahatur,* F G ⊥ A B : *Circulus circa* F G *æqualis est figuræ curvilineæ* A F B D G C A, *quam Salinon appellat Archimedes.* Fig. 280.

Sunt enim diam. F G q [d] (D A q) + C A q [a] = 2 D E q [b] (CEq) + E A q [c] = ½ A B q + D C q. Pariterque [e] ipsi circuli Quare [f] semicirculi super A B, D C, æquantur circulis ad F G, C A. Et [g] Circulus ad F G minus illo ad A C, hoc est minus paribus semicirculis super A C, D B æqualis est Salino, sive figuræ à quatuor semicirculis A B, B D, D C, C A conclusæ. a 10. 2. b *hyp.* & *ult* 1. c *hyp.* & 4. 2. d 15, *dif.* e 2. 12. f *ax.* 7 g *ax.* 3.

Nota.

(Salinon) sive σελινιον Luna est, quatenus vultu planissimè suo appartet, hoc est, μηνοειδής. Unde nomen antiquitùs erat puerorum amuletis.

Lemma

Lemma XV.

Fig. 281. *In semicirculo* A C B, *sit* C B *chorda Pentagoni & recta* C D *per arcûs* C A *punctum medium* D *transiens diametro* A B *productæ occurrat in* E, *atque connectatur* D A *Cathetus* F G *auferet* G F *semidiametro circuli parem.*

Jungantur CA, GD, DB, & è centro HD. Est igitur (ob [a] CAB = $\frac{2}{5}$ recti) CAD [b] = DAB = $\frac{1}{5}$ recti : utque (2 D A H) [d] D H B = $\frac{2}{5}$ recti. Sed rectus C [c] = G, & F A commune, quare (in trigonis A C F, G A F) A C = [f] A G : necnon (in trigonis A C D, A G D) ob pares angulos ad A, A D commune, & A E = A G, erit [f] A C D = A G D = [g] $\frac{3}{5}$ 2 rect. = $\frac{6}{5}$ recti. atque A C D = [h] D B E, & D B A [k] = D G B. Unde D B = [l] D G.

Item quia D H G = $\frac{2}{5}$ recti, & D G H = $\frac{6}{5}$ recti, erit H D G [k] = $\frac{2}{5}$ recti, & D G [l] = G H.

Postremò quoniam (in triang. E D B, H D G) B D E [h] = (C A B [a] = $\frac{2}{5}$ recti) G D H, & utprius D G H = E B D, & DB = DG, erit E B [f] = G H, & E G [m] = radio B H.

a *Cor.* 10. 4.
b 17. 3.
c 9. 5.
d 5, 32. 1.
e 31. 3.
f 26. 1.
g *sch.* 22. 3.
h *cor.* 22. 3.
k 32. 1.
l 6. 1.
m *ax.* 2.

Coroll. I.

Annexis C H, C G, erunt A C E, H D E, & H C G, G D B trigona isoscelia & similia, similiterque posita & ad bases secta. Nim. duas quintas recti æquant hinc H C B, H C G, G C E; inde E D B, B D G, G D H.

Coroll. II.

Liquet insup. E C (= C A, chordæ $\frac{3}{10}$ totius circuli) divisam esse in D mediâ ac extremâ ratione, cujus segmentum majus E D (= radio D H, ob D B E = D G H,) est latus hexagoni ordinat circulo A C B inscribendi, minusque D C decagoni, per 9, *e.* 13. pariterque juxta mediam extremamque rationem sectas esse E G in B, B H in G, & E H tam in B quàm G, E A denique in centro H. Deinde æquantur cùm E C B tum $\frac{1}{2}$ G C E parti quintæ recti.

Binæ prop. quæ sequuntur in editione Florentinâ ad indubium æternumque opus *Archimedis* de Spherâ prorsus pertinent. Codices etenim Arabici in 15. Lemma omnes desinunt.

Archi-

ARCHIMEDIS ΧΑΜΜΙ'ΤΗΣ

SIVE

Liber de Arenæ numero.

ARbitrantur nonnulli, rex *Gelo*! arenæ numerum infinitum esse. Dico autem non solùm ejus, quæ est circa *Syracusas* reliquamque *Siciliam*, sed etiam quæ in omni regione habitabili pariter atque inhabitabili continetur. Sunt Autem alii, qui non illum quidem infinitum putent, sed nullum dari denominatum numerum posse credant qui illius multitudinem exuperet.

Itaque eos qui ita opinantur, si ejusmodi arenæ molem animo comprehenderent, cujusmodi esset, si universa terra, repleto in eâ mari & cavitatibus omnibus, altissimorum montium vertices exæquaret; atque hujus ipsius rursus alterum multiplicem excogitarent, minimè dubium est existimaturos illius multitudinem numeros longe omnes, multúmque superare. Ego verò id ostendere conabor demonstrationibus Geometricis quas tu ipse assequeris: eorum videlicet numerorum, qui à nobis expressi traditíque sunt in iis, quæ ad *Zeuxippum* Scripsimus, nonnullos non solùm arenæ multitudinem superare, quæ terræ undique repletæ ut diximus æqualis esset, sed etiam quæ ipsi mundo parem haberet magnitudinem. Non enim ignoras mundum à compluribus Astrologis appellari Sphæram, cujus centrum quidem est terræ centrum, semidiameter autem est æqualis lineæ inter centrum solis & centrum terræ interjectæ. Hæc igitur in iis, quæ ab Astrologis scripta sunt, redarguens *Aristarchus Samius* positiones quasdam edidit, ex quibus sequitur Mundum proximè dicti mundi multiplicem esse. Ponit enim stellas inerrantes atque solem immobiles permanere, terram ipsam circumferri circa solem secundùm circumferentiam circuli, qui est in medio cursu constitutus; sphæram autem inerrantium stellarum circa idem centrum cum sole sitam, tantâ esse magnitudine, ut circulus secundum quem ponit terram circumferri, eam habeat proportionem ad distantiam stellarum fixarum, quam centrum Sphæræ habet ad superficiem. (Vide *Copernic.* revol. *l.* 3. *c.* 15.) Id verò manifestò constat fieri non posse. Quoniam enim Sphæræ centrum nullam

habet magnitudinem, neque perfectè ullam habere proportionem ad sphæræ superficiem existimandum est. Quare credibile est *Aristarchum* ita intellexisse, *utputà in hypothesium primâ, &c.*

Suis igitur numeris notisque (captu sanè perfacilibus) ut exhiberet Senex ille Siculus quantum arenarum capiendo esset fixarum orbis jam penitus oppletus, imò eo plusculum, hæc ante cætera poni voluit.

Hypotheses.

1. Est secundùm *Aristarchum*, qui inter sphæras fixarum solísque quàm inertes & defixas globum nostrum circum agitabat, ut hæc tellus: ad orbem Revolutionis Annuæ, (qui veterum Astronomorum Mundus fuit,) ita iste. ad orbem fixarum: Fiatque adeò horum diametris ἀνάλογον, per 18. *e.* 12.

2. Terræ autem ambitus, quem Antiqui Geometræ 300000 stadiorum esse comprobarunt, (quia decuplo liberalior maluit illis esse *Archimedes* αἰ ἀμφιλόγε ἕνεκεν) haud superet trecentas stadiorum Myriadas, sitquè ita (per Cyclometrica *Archim.*) diameter terrestris minor quam stadiorum centrum Myriades.

3. Statuatur solis diameter & terrestri major, & quidem trigecupla diametri Lunaris, neque plus. Quid enim? hanc *Eudoxus* noncuplam Lunaris diametri pridem asseruerat, *Phidiasquè* duodecuplam: & demonstraverat sanè *Aristarchus* (*prop.* 9. libelli aureoli qui adhuc adservari meruit,) nè vix vigecuplam, atqui esse plusquam ipsius octodecuplâm.

Observationes.

1. *Aristarchus* quidem capto solis angulo visuali (quâ in re & manus & visus & organa nimiùm fallere solent,) aiebat solis discum partem Zodiaci vigesimam & septingentesimam subtendere: Veruntamen *Siculus* noster, quoniam Problema suum subtilius eo quicquam haud postulat, observavit binos modò angulos, alium quidem angulo solis paulò majorem, aliumque eo minorem. Is autem erat observandi modus.

Dummodo in crenâ regulæ super palum versatilis jaciat Cylindrulus, solis jàm exorti oppositos solum margines visui ad extremum regulæ posito permittens, angulus quem capiunt rectæ à mediò visu Cylindrulum tangentes, major fuerit visuali solis angulo si

visio fieret in puncto: Quia vero hoc aliter fit, ponatur jam ad regulæ extremum, ubi prius erat visus, globulus, diametrum habens non minorem latitudine pupillæ: atque hunc globum necnon Cylindrulum tangant binæ rectæ; eæ accursu suo angulum efficient minorem angulo solis visuali, cùm utrinque aliquid solaris disci compareat. Cæterum magnitudo visu non minor hac arte investigatur; Sumantur duo Cylindri bene tornati, tersi, & æquè crassi, quorum alter sit albus, alter non albus: Non-albus verò ad oculum quam proximè statuatur in crenâ regulæ prædictæ, alter autem ab oculo magis distet; siquidem viso non-albo albus juxta varia intervalla promotus dispareat, magnitudo paris crassitudinis cum Cylindris istis non minor erit diametro visûs, quod suprà requirebatur. Ubi denique Cylindrulus in crenâ regulæ collocatus totum solis discum à visu penitus abripit, rectæ quæ à visu ducuntur Cylindrulum contingentes continebunt coeundo angulum haud minorem $<$° solis visuali. Ita autem deprehensus est angulus solis visualis major esse $\frac{1}{200}$ recti anguli, minorque $\frac{1}{164}$ recti: Modos tamen alios stellarum diametros & quidem accuratius paulò captandi vide apud *Ricciolum* in Almag.

2. Observatum est 25 papaveres (*μάκωνας;*) in rectam lineam dispositos longitudinem digitalem superare.

Sit tamen, majoris evidentiæ ergo, diameter papaveris haud minor quàm digiti pars quadragesima: atque constet corpus papavere non majus decem millibus arenarum, neque pluribus.

Lemmata.

1. Solis diameter major est latere chiliagoni orbitæ revolutionis annuæ inscripti.

Plano per terræ centrum *h*, visúmque *d* secentur, sole jam exorto, Orbis annuæ revolutionis, terra ipsa, & Sol secundum circulos *abc*, *def*, & *fg*. quem quidem tangant rectæ *dn*, *dt*, itemque *hr*, *hq* secantes circulum *abc* in *a*, *b*. Quoniam, dum *k* horizontem stingit, [a] $< hdk$ rectus est, exceditquè [b] terrestrem diameter solis, erit sole jam prorsus elevato, $< hdk$ obtusus, [c] & $hk \sqsubset dk$, nec non *rhq* ($<$ [d] *ndt*, angulo solis) $\sqsupset \frac{1}{164}$ recti: adeòque recta $ab \sqsupset$ subtensâ $\frac{1}{4 \times 164}$ circuli *abc*. Atqui perimeter 656-goni. $kh :: \sqsupset 44 . 7 :: \sqsupset 656 . 104\frac{4}{11}$, atque adeò latus 656-goni. $kh :: \sqsupset 1 . 104\frac{4}{11}$: quare $\frac{ba}{kh} :: \sqsupset$ ($\frac{11}{1148}$, *i. e.* in integris, $:: \sqsupset$)

Fig. 283.

a 18. 3. Commandini.
b *hyp.* 3. *pag.*
c 32, 19. 1.
d 24 *opt.* Aucl.
e *Observ.* 1.
f *cor.* 33. 6.

g Ptol. Alm. l. 1. c. 9. $\frac{1}{100}$: atque *ba* multò $\sqsupset \frac{hk}{100}$. est, autem *ba* diameter circuli [g]

h 13. 5. quippe (ob *auh*, *bkr*, rectos [m] & *h* communem) est [n] $hk . ha$

i 6. 1. $= hk :: kr . au$: unde [o] $kr = au$, & diameter ($= 2kr$)

k 28. 5. $= ab$; Estque [p] $2hy \sqsupset ab$ sive $2ks$, unde $hy + ks \sqsupset \frac{1}{100} hk$,

l 15. def. 1. & reliquum $ys \sqsubset \frac{99}{100} hk$, adeòque $hk . ys :: \sqsupset 100 . 99$.

m 3. 18. 3. Quia autem tam hr [c] $\sqsupset hk$, quàm $ys \sqsupset dt$, (Scil. junctis

n 4. 6. dy, st, obtusi [r] sunt $\angle$ [i] dyz, zst, & [c] $dz \sqsubset yz$ necnon $zt \sqsubset zs$,

o 9. 5.

p hyp. 3.

q 8. 5. eòque [s] $ys \sqsupset dt$.) erit $\frac{hr}{dt}$ (:: [q] $\sqsupset \frac{hr}{ys} :: \sqsupset \frac{hk}{ys}$ [t]) :: $\sqsupset \frac{100}{99}$

Fig. 284.

r Cor. 16. 3. Præterea in trigonis rectangulis hkr, dkt, quia $kr = kt$,

s 4. ax. ac hr (hq) $\sqsubset dt$, erit angulus [d] major $tdk . rhk ::$

t ut priùs. $\sqsubset hk . dk$.

u cor. 37. 3. & 15. 5. $\sqsupset hr . dt$. [Compositis etenim ad rectos trigonis ktd, khr,

x 12, 28. 1. sit $df = hk$, & [x] $fi \parallel kr$, circuli igitur pares circa pares diametros

y sch. 31. 3. df, hk, [y] transibunt per i, r, eritque $\frac{\angle fdi}{\angle rhk}$ (:: [z] $\frac{\text{arcus } fi}{\text{arcus } kr}$) [g]

z 33. 6.

Fig. 285. :: $\sqsubset$ [h] $\frac{\text{recta } fi}{\text{rect. } kr} :: \sqsubset$ [n] $\frac{(fd)\, kh}{kd}$ Vel Componantur triangula ista ad acutos, h, d, & centro d, intervallo do, describatur circulus poq, Erit igitur $\frac{\angle kdo}{\angle odt}$ (h. e. [f] $\frac{\text{sector } pod}{\text{sect. } oqh} :: \sqsupset$ [q] $\frac{\text{sect. } pod}{\Delta\, oth}$) :: $\sqsupset$ [q] $\frac{\Delta\, kod}{\Delta\, oth}$ sive [i] $\frac{ko}{ot}$; & componenti, $\frac{\angle kdt}{\angle khr}$ (:: $\sqsupset$ [k] $\frac{(kt)\, kr}{ot}$) :: $\sqsupset$ e. $\frac{hr}{dt}$.]

Inde [u] $\frac{ndt}{rhk}$ (:: $\sqsupset \frac{hr}{dt}$) multò :: $\sqsupset \frac{100}{99}$. Tum, quia ndt (major $\frac{1}{200}$ recti) $rhq :: \sqsupset \frac{1}{200} . \frac{99}{20000}$, h. e. 1001 . 99, est rhq ($\sqsubset$ [1] $\frac{99}{20000}$ recti, h. e. $\sqsubset \frac{1}{202} . \frac{2}{99}$ recti) multò $\sqsubset \frac{1}{203}$ recti. Solis igitur diameter ba major est subtensâ parti $\frac{1}{812}$ circumferentiæ totius, & adhuc major subtensâ $\frac{1}{1000}$ circumferentiæ seu latere Chiliagoni Orbitæ ἐνιαυσία inscripti.

Coroll.

Hinc autem sequitur, quia ambitus Chiliagoni, (qui quidem

α 21. 1 α excedit tres diametros Orbitæ annuæ cui inscribitur, cùm vel

β cor. 15. 4. ambitus hexagoni β æquet tres diametros sui circuli,) minor est mille diametris

diametris solis, & adhuc minor tricies mille diametris Lunæ aut terræ, Diametrum Orbis revolutionis annuæ (quem mundum vocant, minorem esse decies mille diametris terræ, multoque minorem γ centrum Myriadibus myriadum stadiorum, sive γ *hyp.* 2.
10000 × 1000000.

2. Τῶν ἀριθμῶν κατονόμαξις.

Novem primi gradus seu Periodi ab unitate in ratione decuplâ (quæ ad præsens institutum abundè sufficit) progredienti vocentur Numeri Primi: & gradus octo præter unitatem Octas Prima. Isti verò numeri commodè satis exprimi solent, notis puta distinctis ad Myriades & ad Myriadum Myriades notis illis repetitis. Dein novem gradus, qui proximè sequuntur incipiendo à nono seu ultimo gradu, numerorum primorum, appellentur Numeri Secundi necnon octo ipsius gradus excepto itidem primo, Octas secunda: Atque ita porro

3. Si numeri ab unitate proportionalis fuerunt, ut $\frac{1 = \alpha.\beta.\gamma.}{\text{seu } 1.b.b^2}$ $\frac{\delta.\varepsilon.\zeta.\eta.\theta.\iota.\kappa.\lambda.}{b^3.b^4.b^5.b^6.b^7.b^8.b^9\ b^{10}}$ & aliqui δ, θ ex eadem analogeâ sese multiplicaverint, factus inde numerus ($\delta \times \theta =$) χ æqualis erit ipsi λ, qui tantum distet à θ majore multiplicantium, quantum minor ab unitate in eadem analogiâ.

Quippe [a] $\frac{\alpha.\beta :: \theta.\iota}{\beta.\delta :: \iota.\lambda}$ & $\alpha.\delta :: \theta.\lambda$: quare [b] θ λ seu $\chi = \alpha\lambda$ a *hyp.* & 14.7.
$=$ [c] λ. Patet etiam $\lambda - \iota$ distare ab unitate quantus est numerus b 19.7.
ex utrisque conflatus, quibus se invicem multiplicantes δ, θ ab unitate c 5 *ax.* 7.
absunt: Sunt equidem α β, γ, δ, ε ζ, η, θ, quot ipse θ ab unitate distat, at ι, κ, λ, sunt uno minores, quàm quibus δ distat ab unitate: etenim unà cum θ totidem erunt.

His igitur partim positis, partim verò demonstratis, quod jam propositam est, ostendemus.

Propositio Princeps.

Arenæ numerus, quæ magnitudinem obtineat æqualem Sphæræ stellarum inerrantium ab *Aristarcho* positæ, minor est mille Myriadibus octavorum, quos vocamus, numerorum, tantum abest ut sit vel infinitus vel ineffabilis.

Quia diameter papaveris est ad digitum :: (1 . 40 [a] :: 40 . 1600 a *Observ.* 2.
::) 1600 . 64000; Sphæra ex diametro digitali non [b] continebit b 18. 2.
plusquam 64000 papaverum globosorum, sive [a] arenarum 64000 ×

10000,

10000, hoc eſt, ſex myriades myriadum quatuorque myriadum millia $=$ ſex n^{ii} $+$ quatermillibus myriadum α^{i} : atqui $\sqsubset$ decem α^{ii}. Numerus autem arenarum, quas capit ſphæra ex diametro centum digitorum, adeóque [b] ſphæræ ex digitali diametro multiplex centum myriadibus, minor eſt $1000000 \times$ decem n^{ii}, hoc eſt, minor mille myriadibus α^{ii}: Nam $10\ \alpha^{ii} \times 1000000$, qui fit ex $10\ n^{ii}$ termino decimo ab unitate in ratione decuplâ, & ex 1000000 termino ſeptimo
c Lemma 3. [c]erit progreſſionis iſtius terminus decimus ſextus; octo autem primi termini pertinent ad n^{i}, & octo ſequentium ultimus valet mille myriades ἀρ n^{ii}. Rurſus numerus arenarum, unà cum monade quibus conſtat ſphæra ex diametro decies mille digitorum, qui quidem ſtadium ſuperant, hoc eſt, ſphæra [b] centum myriadibus multiplex ſphæræ ex diametro digitali, minor eſt $1000000 \times$ mille myriades n^{ii}, hoc eſt, minor decem myriadibus ἀρ n^{iii}, ſive progreſſionis iſtius termino ($16+7-1=$[c]) 22do, quandoquidem octo primi termini cum unitate pertineant ad n^{i}, octo ſequentes ad n^{ii}, & cæterorum ſex ultimus deſinat in decem myriades n^{iv}. Numerus etiam arenarum, quibus repletur ſphæra centum ſtadiorum diametrum habens adeóque ſphæræ ex diametro unius ſtadii multiplex myriadibus centum, minor erit $1000000 \times$ decem myriades n^{iii}, ſive progreſſionis termino ($22+7-1$) 28vo, hoc eſt, minor mille unitatibus ἀρ n^{iv}. Pariter ſphæra ex diametro denum millium ſtadiorum, adeóque ſphæræ centum ſtadiorum diametrum habentis multiplex centum myriadibus, continet arenarum numerum minorem 1000000×1000 unitates ἀρ n^{iv}, ſive termino progreſſionis ($28+7-1$) 34to, hoc eſt, minorem decem unitatibus ἀρ n^{v}. Dein ſphæra ex diametro centum myriadum ſtadiorum continet arenas pauciores quàm 1000000×10 unitates ἀρ n^{v}, ſeu quantitatem termini 40^{mi}, hoc eſt, pauciores quàm mille myriades ἀρ n^{v}. Item ſphæra ex diametro decies mille myriadum ſtadiorum habet arenarum numerum minorem $1000000 \times$ mille myriades ἀρ n^{v}, ſeu termino 46to, hoc eſt, minorem myriadibus decem ἀρ n^{vi} : Et ſphæra ex diametro centum myriadum myriadum ſtadio-
d Cor. lem. 1. rum, quæ [d] orbis annui diametro major eſt continet arenarum numerum minorem $1000000 \times$ myriades decem ἀρ n^{vi}, ſive termino 52do, hoc eſt, minorem mille unitatibus ἀρ n^{vii}. Ergo mundus veterum Aſtrologorum ſeu orbis revolutionis annuæ non capit tot arenas quot ſunt mille unitates ἀρ n^{vii}. Denique numerus arenarum quæ repleant fixarum ſphæram *Ariſtarchicam*, minor eſt mille myriadibus ἀρ n^{viii}. Quoniam enim diametri terræ, mundi Aſtrolo-
e Hyp. 1. gorum, orbiſque fixarum fuit $\div\div$ [e], oſtenſáque eſt diameter mundi

iſtius

iſtius minor 10000 diametris terræ, erit etiam fixarum orbis diameter minor 10000 diametris mundi, & fixarum orbis [b] minus decies millies decies mille myriades mundorum: unde numerus arenarum, quas continebit ſphæra æqualis fixarum orbi juxta *Ariſtarchum*, minor erit 10000000000000 × mille unitates ἀρ n^{vii}, ſive progreſſionis termino (13+52—1) 64to, qui eſt gradus octavus ἀρ n^{viii}; minor mille myriadibus ἀρ n^{viii}. Patet ergo propoſitum. Hæc autem, rex *Gelo!* quamplurimis quidem, qui Mathematicis inſtructi non ſunt, non admodum credibilia fore arbitror: illis verò qui ea didicerunt, & circa diſtantias & magnitudines terræ, ſolis, mundique totius elaborarunt, credibilia prorſus eſſe propter demonſtrationem. Quapropter & de his ipſis ſpeculari aliquos non abſurdum eſſe exiſtimavi.

ARCHI-



ARCHIMEDIS EXOTERICA.

PRæter illa *Archimedis* opera quæ hic exponuntur, alia memorat *Rivaltus* partim ab *Archimede* ſcripta, partim ab illo facta; ſed quorum particularis notitia, præ temporum injuriâ, ad nos non pervenit.

1. Ex *Vitruvio* ad hunc ſenſum narrat. Cùm *Hiero Syracuſarum* Rex, Aurum certo pondere Artifici tradiderat, qui Coronam inde conficeret; poſteaque intellexerat Artificem, Auri parte ſurreptâ, Argentum æquali pondere ſubſtituiſſe; *Archimedem* ea de re conſuluit. Ille autem Balneum ingreſſus, effluentem aquam conſpicatus, hinc anſam cepit determinandi, quantum Auri ſurreptum fuerat; ſtatimque præ gaudio nudus exiliens Balneo, vociferatus Εὕρηκα, Εὕρηκα, domum ſe contulit. Nempe, cum Aurum, ejuſdem ponderis, minoris molis ſit quàm Argentum; moleſque corporis irregularis non aptiùs colligi poſſit, quàm ex Aquæ menſurâ cujus locum occupet; explorato primùm, quantum ſpatii in Aquâ occuparet Corona, quantumque Aurum purum ejuſdem ponderis, & quantum denique æqualis ponderis Argentum; hinc calculo colligendum eſſe, quantum Auri & quantum Argenti miſcuerat Artifex.

Inventum certè *Archimede* dignum. Sed, quomodo ille calculum inſtituerit, & quantâ ſubtilitate ſingulorum molem rimatus eſt, non exponit *Vitruvius*; contentus rem craſſiùs expoſuiſſe, quam ipſam (puto) executus eſt *Archimedes*. Et, ſiquid ea de re ſcripſit *Archimedes* ipſe; periit. Alii alios modos expoſuerunt; inter quos *Ghetaldus*, in ſuo *Archimede promoto*; atque *Johannes Baptiſta Hodierna* in ſuo *Archimede Redivivo*, impreſſo *Panormi Siculorum*, in 4°, Anno 1644 Italicé.

Calculus ſic commode inſtituitur. Pondus Auri quantum eſt Coronæ, occupet ſpatium L; Pondus Argenti huic æquale, ſpatium L + M. Pondus Coronæ, ſpatium L + N. Ergo, ut N ut ad M, ſic pondus Argenti admixti, ad pondus Coronæ. Nempe ſpatii incrementum

crementum M prodiret si totum Aurum Argento commutatum foret; adeóque incrementum N, ostendet quantum jam commutatum sit.

2. Ex *Athenæo* & *Diodoro*, Cochleam *Archimedis* memorat ad Aquam ex Sentinâ stupendi Navigii *Hieronis* exhauriendam, unius hominis operâ: eandemque machinam ad aquas ex Fodinis, Lacubus, similibusque exhauriendis adhibitam. Recentiores ex conjecturâ hujusmodi figuram accommodant: & speciatim *Guido Ubaldus* in peculiari Tractatu. Fig. 284.

3. Ex *Athenæo*, memorat *Archimedis Helicem*, cujus ope (cum paucis aliis instrumentis) stupendum illud navigium in mare deduxit *Archimedes*. Figuram hujusmodi, ex conjecturâ supplent. Fig. 285.

4. Ex *Zetze* & *Oribasio*, recenset *Archimedis* Trispastum, quo 7000 mediorum pondus attrahebat. (Nescio an 50000 legendum sit, propter πεντεμυριομέδιμνον.) Figurasque adhibet has duas. Fig. 286, 287.

5. Ex *Polybio*, & aliis, memorat *Archimedis* Tormenta Bellica, Ballistas, Catapultas, Sagittarios, Scorpiones, Manum ferream cum catena (Tollenovis instar) aliúmque apparatum, quibus contra copias, navesque, *Marcelli* & *Appii* pugnatum est.

6. Ex *Galeno* & *Zetze*, *Archimedis* Πύρεια memorat, seu specula Ustoria, quibus *Marcelli* Naves incendebat. De quibus *Cavalerius*, in tractatu posthumo, *Del Specchio Ustorio*, (*Bononiæ* impresso in 4°, Anno 1650.) Italicè fusius agit.

7. Ex *Zetze*, *Pappo*, & *Tertulliano*, memorat *Archimedis* Pneumatica & Hydroscopica: nec hujusmodi tantum Instrumenta constructa, sed & libros ab *Archimede* conscriptos.

8. Ex *Claudiano*, *Archimedi* Σφαιροποιΐαν memorat; seu machinam Cœlestium motuum æmulam.

Verùm quum horum omnium nihil jam exstet ab *Archimede* conscriptum; non nisi ex dubiis conjecturis suppleri possunt.

FINIS.

ERRATA sic corrigantur:

Pag.	Lin.	In Argumento.
2	8	A *pro* B.
2	13	X *pro* H & G.
3	2	Z vel Y *pro* X.
8	*pe.*	C F H *pro* F G M.
9	19	B M *pro* D M.
10	34	F N O L *pro* P X O L.
11	3	A G *pro* H G.
16	10	F E ⊏ D E *pro* G F ⊏ D E.
16	17	DEq. EB × BA :: Tq. Mq *pro* DEq. EB × AB :: Mq. Tq.
19	11	C F *pro* C E.
20	*ul.*	C D *pro* F B.
21	4	Q.AE—EB *pro* Q.EB—AE.
22	28	B A *pro* D A.
23	4, 5, 6, 7	A G *pro* A E.
30	1	L X *pro* L K.
31	1	*In margine,* D E *pro* D C.
31	14	$\frac{4\,DEq}{BX}$ *pro* $\frac{4\,FEq.}{BX}$
31	26	B H *pro* E H.
35	5	F G *pro* O G.
35	6	F H *pro* O H.
37	11	C B *pro* A B.
37	*pe.*	Y Z *pro* V Z.
38		Fig. 49. *pro* 94.
41	13	B H *pro* B E.
43	*pe.*	B A C *pro* B A D.
45	25	X V *pro* X Y.
52	22	A, B *pro* A, F.
54	13	A E *pro* B E.
58	25	M C *pro* Z C.
59	*ul.*	majus *pro* minus.
62	16	G I *pro* C I.
64	22	L E *pro* L I.
64	26	O *pro* I.
64	29	D C *pro* G D.
65	6	B X K *pro* B X R, & B F *pro* B E.
66	16	A F *pro* A G.
68	17	D B q *pro* D K q.
68	33, 34	H F × F E *pro* H F × F D.
69	22	G I *pro* G L.
69	28	T O *pro* I O.
70	4	sectionum *pro* contingentium.
70	8	A E *pro* A F.
70	10	LSH *pro* LSF, & ALN *pro* ALM.
74	22	*Deest* + *inter* AEq & CX×XA.
75	*pe*	*Deest* + *inter* EXq & CE×ED.
77	18	E C *pro* F C.
78	21	*Citatur* 4 & 22.6 *pro* 19.5.
79	10	A B *pro* A D.
79	26	K O B *pro* K O P.
85	5	F A *pro* D F.
91	*ul.*	O P *pro* O D.
96	*pe.*	F G *pro* F M.
99		*Ult. duæ lineæ ita corrigantur,* FN.FL::NK.KL & (ob sect. AMD) NK.KL :: NM.ML quar FN.FL::NM.ML *Q.e.a.*
102	8	A D, B G *pro* A C, B C.

In Citationibus.

Prop.9.nota f, *pro* 17.6 *lege* 16.6. *pr.*16.*n.*a, 13 hujus *l* 12 hujus. *pr.*20.*n.*c, 3.6 *l.*1.6. *pr.*33.*n.*c, 4.*l* 4.2. *pr.*38 *n.*c, 21 hujus *l.*37 hujus. *pr.* 44 *n.* a, 31 hujus *l.*37 hujus. *pr.*45.*n.*f, 7.1 *l.*7.5. *pr.*45.*n.* g, 4.1 *l.* 4.6. *pr.* 51. *n.* m, 7.1 *l.* 7.5. Libri I.

Prop. 2. *nota* g, *pro* 6.5 & 3 ax. 1 *lege* 6 & 5.2. *pr.* 4. *n.* g, 53. hujus *l.* 53.1 hujus. *pr.* 48. *n.* g. *deest hæc citatio* (17 ax. 1.) Libri II.

Prop. 4. *nota* a, *pro* cor. 44 hujus *lege* cor. 15.2 hujus. *pr.*8. *n.* k, 8.1 *l.* 4.3 hujus. *pr.* 16. *n* d, & *pr.* 16, 17, 18, 19. *n.* b, *in singulis pro* 16.5 *l.* 4.6. *pr.*20. *n.* c, 16.3 *l.*4.6. *pr.* 21. *n.* b, 46.5 *l.* 4.6. *pr.* 22. *n.* k, 2.6 *l.* 6.2. *pr.* 23. *n.* b, 16.5 *l.* 4.6. *pr.* 23. *n.* d, *l.* facilè deducitur ex 15.3 hujus. *pr.* 33. *n.* d, 2.6 *l.* 6.2. *pr.*34 *n.*e, 15.6 *l.* 16.6. *pr* 37.*n* b, 49 & 51. hujus *l.* 2 & 11.3 hujus. *pr.*44.*n.*b, & *pr.*45.*n.*c, *pro* 15.6 *l.*16.6. *pr.*56.*n.*p, ex 2 vel 4.8 *l.* 2 vel 4.3. Libri III.

*Prop.*14 *nota* a, *pro* cor.14 hujus *lege* 5 hujus *pr.*15.*n.*b, 36.1 hujus *l.*39.3 hujus. *pr.* 21. *n.*a, 6 hujus *l.* 8 hujus. *pr.* 21. *n.*b, 15 hujus *l.* 17 hujus. Libri IV.

In Schematis.

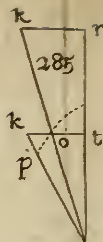
Fig.14.*deest linea* F G. fig. 30 *deest* D *ubi* EH *occurrit sectioni.* fig.136. *pro* H *lege* B. fig.148 *deest* D *ubi lineam* AC *bisecat* KB. fig.176.*deest* E. fig. 194. *deest ubi* Y *ubi* LX *diametro occurrit.* fig.276.*deest* E *ubi* DK *sectioni occurrit.*

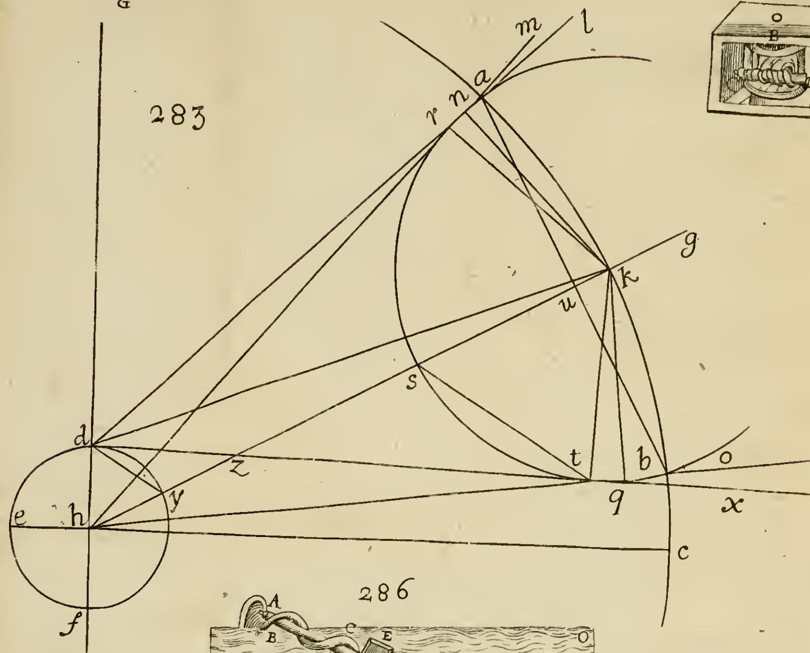
280
A C E D B G

281
C D F A H G B E

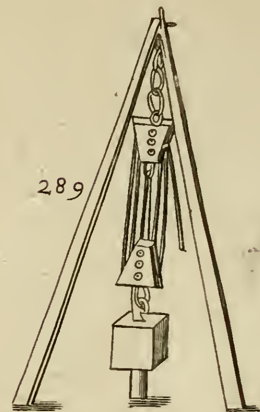
282
B H G F A E C

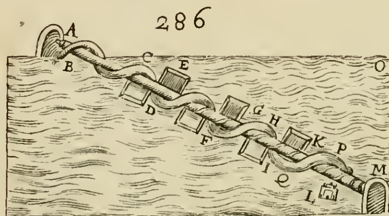
284
k f h d t i r

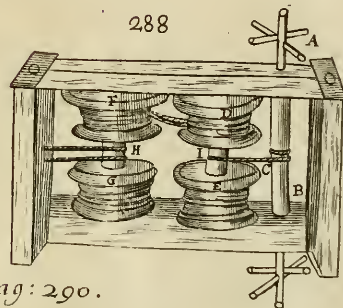




287
o G
F
E







Archimed: Pag: 290.

